

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR - LEGANÉS
INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN



PROYECTO FIN DE CARRERA

Ortogonalidad y capacidad en sistemas MIMO masivo

AUTOR: Irene Romero Ibáñez

TUTOR: Matilde P. Sánchez Fernández

Leganés, 2014

TITULO: *Ortogonalidad y capacidad en sistemas
MIMO masivo*

AUTOR: Irene Romero Ibáñez

TUTOR: Matilde P. Sánchez Fernández

La defensa del presente Proyecto Fin de Carrera se realizó el día 9 de julio de 2014, siendo calificada por el siguiente tribunal:

PRESIDENTE: Ángel María Bravo Santos

SECRETARIO: José Joaquín Escudero Garzás

VOCAL: Pablo Serrano Yáñez-Mingot

Habiendo obtenido la siguiente calificación:

CALIFICACIÓN:

Presidente

Secretario

Vocal

Agradecimientos

En primer lugar a mi tutora Mati por darme la oportunidad de trabajar con ella en este proyecto, por sus consejos e interés en el mismo, así como todo la ayuda, comprensión y el apoyo que me ha prestado durante este camino.

A mi familia: mis padres y mi hermana, por todos los ánimos y el cariño que me han dado durante esta última etapa de mis estudios, y siempre.

A mis amigos: desde los de siempre hasta todos los que he ido ganando estos años en la universidad, con los que he compartido tantos buenos momentos que no sabría por dónde empezar a enumerar y sin los cuales estos últimos años no habrían sido tan geniales.

Índice general

1. Introducción	15
1.1. Sistemas MIMO	15
1.2. Canal MIMO de banda estrecha	16
1.3. Sistemas MIMO masivo	17
2. Modelo de canal realista	19
3. Capacidad	23
3.1. Introducción	23
3.2. Información mutua y capacidad de Shannon	24
3.2.1. Definición matemática de capacidad	24
3.3. Canales MIMO	25
3.4. Descomposición de un canal MIMO en múltiples canales pa- rales	28
3.5. Estrategias de transmisión	30
3.5.1. CSIT: Conocido el canal en el transmisor	30
3.5.2. CDIT: Conocida la distribución del canal en el transmisor	31
3.6. Resultados de las simulaciones	33
3.6.1. Parámetros para las simulaciones	34
3.6.2. Evolución de la capacidad con respecto a la SNR	34
3.6.2.1. Sistema MIMO con el mismo número de an- tenas transmisoras y receptoras	34
3.6.2.2. Sistema MIMO Masivo con M antenas trans- misoras y 4 antenas receptoras	37
3.6.3. Alta SNR	41
3.6.3.1. Sistema MIMO con el mismo número de an- tenas transmisoras y receptoras	43
3.6.3.2. Sistema MIMO masivo con M antenas trans- misoras y 4 antenas receptoras	43
3.6.4. Baja SNR	48
3.6.4.1. Sistema MIMO con el mismo número de an- tenas transmisoras y receptoras	48
3.6.4.2. Sistema MIMO masivo con M antenas trans- misoras y 4 antenas receptoras	51

3.6.5. Comparación entre los diferentes algoritmos para el es- cenario CDIT	51
4. Ortogonalidad	57
4.1. Medidas de ortogonalidad	57
4.1.1. Norma de Frobenius	58
4.1.2. Defecto de ortogonalidad	59
4.1.3. Norma del producto de las filas	60
4.1.4. Elección de la medida de ortogonalidad más adecuada .	60
4.2. Resultados de ortogonalidad de las simulaciones	62
4.2.1. Parámetros de las simulaciones	62
4.2.2. Ortogonalidad en el caso asimétrico $N = 2$	62
4.2.3. Ortogonalidad en el caso asimétrico $N = 4$	65
4.2.4. Ortogonalidad en el caso simétrico $N = M$	65
4.2.5. Comparación de ortogonalidad entre matrices realistas y matrices i.i.d.	68
5. Conclusiones y líneas futuras de trabajo	71
5.1. Conclusiones	71
5.2. Líneas futuras de trabajo	72
Anexos	75
A. Descomposición de matrices	77

Lista de Figuras

3.1.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) para un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras y en el que $d_t = \frac{\lambda}{2}$	35
3.2.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) para un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras y en el que $d_t = \lambda$	36
3.3.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) para un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras y en el que $d_t = \frac{\lambda}{2}$	39
3.4.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) para un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras y en el que $d_t = \lambda$	40
3.5.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras para $\text{SNR} = 19$ dB. Evolución con respecto a la distancia entre antenas transmisoras.	44
3.6.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras para $\text{SNR} = 19$ dB. Evolución con respecto al ángulo de dispersión en el transmisor.	45
3.7.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras para $\text{SNR} = 19$ dB. Evolución con respecto a la distancia entre antenas transmisoras.	46

3.8.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras para $\text{SNR} = 19$ dB. Evolución con respecto al ángulo de dispersión en el transmisor.	47
3.9.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras para $\text{SNR} = -5$ dB. Evolución con respecto a la distancia entre antenas transmisoras.	49
3.10.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras para $\text{SNR} = -5$ dB. Evolución con respecto al ángulo de dispersión en el transmisor.	50
3.11.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras para $\text{SNR} = -5$ dB. Evolución con respecto a la distancia entre antenas transmisoras.	52
3.12.	Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras para $\text{SNR} = -5$ dB. Evolución con respecto al ángulo de dispersión en el transmisor.	53
3.13.	Comparación de las dos estrategias de transmisión planteadas para el escenario CDIT. Evaluación de las mismas con respecto a ASD y para diferentes valores de SNR	54
3.14.	Comparación de las dos estrategias de transmisión planteadas para el escenario CDIT. Evaluación de las mismas con respecto a d_t y para diferentes valores de SNR	55
4.1.	Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO masivo con M antenas transmisoras y 2 antenas receptoras para diferentes valores de d_t	63
4.2.	Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO masivo con M antenas transmisoras y 2 antenas receptoras para diferentes valores de ASD	64
4.3.	Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO masivo con M antenas transmisoras y 4 antenas receptoras para diferentes valores de ASD y d_t	66
4.4.	Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO con igual número de antenas transmisoras y receptoras para diferentes valores de ASD y d_t	67

-
- 4.5. Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO con 50 antenas transmisoras y diferente número de antenas receptoras para diferentes valores de ASD y d_t 69

Lista de Tablas

3.1. Capacidad (bps/Hz) para un sistema MIMO masivo con el mismo número de antenas en transmisión que en recepción. Comparación entre los escenarios CSIT y CDIT para 10, 60 y 80 antenas.	38
3.2. Capacidad (bps/Hz) para un sistema MIMO masivo con 4 antenas en recepción y 10, 60 y 80 antenas en transmisión. Comparación entre los escenarios CSIT y CDIT	42
4.1. Valores de la norma de Frobenius para el caso de matrices i.i.d. con 50 antenas en el transmisor y 2, 4 y 50 antenas en el receptor	60
4.2. Valores del defecto de ortogonalidad para el caso de matrices i.i.d. con 50 antenas en el transmisor y 2, 4 y 50 antenas en el receptor	61
4.3. Valores del producto de filas para el caso de matrices i.i.d. con 50 antenas en el transmisor y 2, 4 y 50 antenas en el receptor .	61

Capítulo 1

Introducción

1.1. Sistemas MIMO

Desde los años 80, las redes celulares han evolucionado durante varias generaciones, desde proporcionar un servicio telefónico convencional hasta sustentar un amplio rango de aplicaciones (como mensajes de texto, navegación en Internet, redes sociales, videollamada...) soportadas por una amplia variedad de dispositivos, como *smartphones* u ordenadores. Estos avances han alimentado la demanda de mayores eficiencias espectrales de forma que los recursos espectrales de los que disponemos de forma limitada sean utilizados más eficientemente.

En paralelo a estos avances, y alrededor de los años 90, emergen los sistemas de comunicaciones inalámbricas *multiple-input multiple-output* (MIMO) como una de las áreas más fértiles de investigación en el campo de la teoría de la información y comunicación [1]. Estas investigaciones arrojan como resultado el enorme potencial del que disponen las técnicas MIMO, en las que se usan múltiples antenas en el transmisor y en el receptor, para mejorar aspectos como la eficiencia espectral. Y así, MIMO alcanza a partir de este momento y de forma muy rápida un alto nivel de popularidad durante estas últimas décadas, debido a las mejoras en las prestaciones que proporcionan estos sistemas y está siendo incorporado ya en estándares como LTE [2], que admite actualmente hasta ocho antenas en la estación base.

La tecnología MIMO constituye un antes y un después en los sistemas de comunicaciones inalámbricas. Esta tecnología ofrece multitud de beneficios que nos acercan a cumplir con los desafíos impuestos por las limitaciones en un canal inalámbrico así como por las restricciones de nuestros recursos o el espacio físico ocupado por las antenas, entre otros. Además de explotar tanto la dimensión temporal como la frecuencial en sistemas inalámbricos convencionales con una única antena, las posibilidades que ofrece MIMO son

realizables también explotando la dimensión espacial que nos proporciona la colocación de múltiples antenas en el transmisor y receptor.

Básicamente, cuanto mayor es el número de antenas en el transmisor o receptor, mayor es el número de grados de libertad que nos puede proporcionar el modelo de propagación y mayores serán las prestaciones en términos de velocidad o fiabilidad del enlace.

En conclusión, la demanda de velocidades más altas no deja de crecer en la actualidad. En muchas circunstancias, los sistemas inalámbricos son una efectiva solución, proporcionando altas velocidades a un menor coste que las tecnologías basadas en cables como xDSL. Las limitaciones en ancho de banda y en potencia en los sistemas de comunicaciones actuales hacen que la tecnología MIMO sea indispensable en estos momentos.

1.2. Canal MIMO de banda estrecha

Un sistema de comunicaciones punto-a-punto de M antenas en transmisión y N antenas en recepción, con ambos arrays de antenas conectados por un canal de forma que cada antena receptora está sujeta a la acción combinada de las antenas transmisoras, puede ser representado por el siguiente modelo:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1} & \cdots & h_{N,M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

o de forma más simple como sigue:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1.2)$$

donde \mathbf{x} es el vector transmitido de dimensiones $[M \times 1]$, \mathbf{n} es el vector de ruido de dimensiones $[N \times 1]$, y \mathbf{H} es la matriz $[N \times M]$ cuyos elementos h_{nm} representan la ganancia desde la antena m transmisora hacia la antena n receptora.

Aquí asumiremos un canal con ruido Gausiano de media cero y matriz de covarianza $\sigma^2 \mathbf{I}_N$, donde típicamente $\sigma^2 \triangleq E[n_i^2] = N_0/2$ e la densidad espectral de potencia del ruido del canal. Por simplicidad, dada la potencia P a transmitir, asumiremos un modelo equivalente con un ruido cuya potencia sea de $\sigma^2 = 1$ y la potencia transmitida sea $P/\sigma^2 = \text{SNR}$, donde SNR se puede interpretar como la relación señal a ruido media que se recibe por antena en condiciones de ganancia unidad. Esta restricción de potencia implica que los

símbolos de entrada satisfagan

$$\sum_{i=1}^M \mathbf{E}[x_i x_i^*] = \text{SNR} \quad (1.3)$$

o, de forma equivalente, $\text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{x}}) = \text{SNR}$, donde $\text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{x}})$ es la traza ¹ de la matriz de covarianza de entrada $\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H]$.

Así pues, podemos establecer diferentes hipótesis sobre la información de la matriz de canal \mathbf{H} en el transmisor y receptor, referidas al CSIT (*Channel state information at the transmitter*) y al CSIR (*Channel state information at the receiver*), respectivamente. Para un canal estático, se asume CSIR típicamente, ya que la ganancia de canal se puede obtener relativamente fácilmente enviando una secuencia piloto para la estimación de canal. Si disponemos de un canal de realimentación, podemos enviar el CSIR al transmisor y tener el CSIT. CSIT también puede estar disponible en algunos sistemas bidireccionales basados en TDD (*Time Division Duplex*). Cuando no conocemos el canal ni en el transmisor ni en el receptor, debemos asumir alguna distribución de la matriz de canal \mathbf{H} . El modelo más común de esta distribución es un modelo de media cero y espacialmente blanco, donde las entradas de \mathbf{H} son variables aleatorias Gaussianas complejas de simetría circular ², i.i.d. ³, de media cero y varianza unidad. A no ser que nos especifiquen el modelo de distribución que tiene \mathbf{H} , asumiremos este.

1.3. Sistemas MIMO masivo

Con sistemas MIMO masivo o *very large MIMO* nos referimos a sistemas que utilizan arrays de antenas con un número mucho mayor de elementos que los sistemas a los que estamos acostumbrados, como cien antenas o más. En los sistemas MIMO masivo un elevado número de antenas sirven simultáneamente a un número mucho menor de terminales. El número de terminales que pueden servirse simultáneamente es limitado pero no por el número de antenas, sino por nuestra incapacidad para adquirir la información del canal para un número ilimitado de terminales.

Además, en sistemas MIMO masivo, cada antena hace uso de muy poca potencia (del orden de mW) pero, por supuesto, manteniendo la potencia

¹En álgebra lineal, se define la traza de una matriz cuadrada \mathbf{A} de $N \times N$ como la suma de los elementos de la diagonal principal; es decir, $\text{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ donde a_{ij} representa el elemento que está en la fila i -ésima y en la columna j -ésima de \mathbf{A} .

²Un vector aleatorio complejo \mathbf{x} tiene simetría circular si, para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$, la distribución de \mathbf{x} es la misma que la distribución de $e^{j\theta} \mathbf{x}$. Por lo tanto, la parte real e imaginaria de \mathbf{x} son i.i.d. Para \mathbf{x} simétrico circularmente, tomar $\theta = \pi$ implica que $\mathbf{E}[\mathbf{x}] = 0$. De forma análoga, tomar $\theta = \pi/2$ implica $\mathbf{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = 0$.

³independientes e idénticamente distribuidas

transmitida total constante a medida que aumenta M . Así, la potencia inyectada a cada antena será proporcional a $1/M$. Otra de las ventajas de estos sistemas es que son extremadamente robustos ante el fallo de una o pocas antenas, de forma que no afecte significativamente al sistema.

Por supuesto no podemos aumentar de forma ilimitada el número de antenas pues tenemos restricciones tales como los recursos físicos. Cuando dejamos que M o N tiendan a infinito llegará un momento en el que nuestros modelos matemáticos que describen la realidad física, dejarán de tener sentido. Pero mucho antes de que estos modelos matemáticos pierdan el sentido nos habremos encontrado con importantes dificultades ingenieriles a la hora de intentar desplegar un sistema de estas características.

Capítulo 2

Modelo de canal realista

El modelo de canal que describiremos a lo largo de este capítulo es un modelo general que podría ser utilizado tanto en un sistema MIMO de un único usuario como en un escenario MIMO masivo en el que tendríamos múltiples antenas en una estación base (BS) que sirve a varios usuarios. El modelo descrito a lo largo de este capítulo y que emplearemos en este proyecto es una particularización del propuesto en [3] y se detalla en [4].

Un canal MIMO con M antenas transmisoras y N antenas receptoras está definido por la matriz de canal \mathbf{H} , cuyos elementos $h_{n,m}$ definen el desvanecimiento del canal existente entre la antena transmisora m -ésima en la estación base y la antena receptora n -ésima.

Los elementos de la matriz \mathbf{H} pueden estar correlados en tiempo, espacio y frecuencia [5] pero nosotros asumiremos para nuestro escenario un canal estacionario y con desvanecimiento plano. Bajo esta premisa, el modelo de canal se caracteriza completamente por la geometría de las antenas en transmisión y en recepción así como por la dispersión que pueda existir [3]. El elemento $h_{n,m}$ se puede modelar haciendo uso de la función de Green en la posición de la antena n -ésima receptora \mathbf{r}'_n , teniendo en cuenta que la señal se emite desde la antena transmisora m -ésima ubicada en \mathbf{r}_m

$$h_{nm} = \int \int S(\mathbf{k}', \mathbf{k}) e^{-j\mathbf{k}\mathbf{r}_m} e^{j\mathbf{k}'\mathbf{r}'_n} d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \quad (2.1)$$

donde $S(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ es la función de *scattering* o dispersión del canal, que relaciona la onda plana emitida en la dirección \mathbf{k} y que incide en el receptor en la dirección \mathbf{k}' . Si dividimos la onda transmitida en un conjunto finito de ondas planas que parten de direcciones $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_L\}$ y la onda recibida de igual forma con direcciones $\{\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \dots, \mathbf{k}'_{L'}\}$ la matriz \mathbf{H} se puede escribir como

sigue:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} e^{j\mathbf{k}'_1 \mathbf{r}'_1} & e^{j\mathbf{k}'_2 \mathbf{r}'_1} & \dots & e^{j\mathbf{k}'_{L'} \mathbf{r}'_1} \\ e^{j\mathbf{k}'_1 \mathbf{r}'_2} & e^{j\mathbf{k}'_2 \mathbf{r}'_2} & \dots & e^{j\mathbf{k}'_{L'} \mathbf{r}'_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\mathbf{k}'_1 \mathbf{r}'_N} & e^{j\mathbf{k}'_2 \mathbf{r}'_N} & \dots & e^{j\mathbf{k}'_{L'} \mathbf{r}'_N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_1) & S(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2) & \dots & S(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_L) \\ S(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1) & S(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_2) & \dots & S(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(\mathbf{k}'_{L'}, \mathbf{k}_1) & S(\mathbf{k}'_{L'}, \mathbf{k}_2) & \dots & S(\mathbf{k}'_{L'}, \mathbf{k}_L) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} & e^{-j\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_2} & \dots & e^{-j\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_M} \\ e^{-j\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_1} & e^{-j\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} & \dots & e^{-j\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\mathbf{k}_L \mathbf{r}_1} & e^{-j\mathbf{k}_L \mathbf{r}_2} & \dots & e^{-j\mathbf{k}_L \mathbf{r}_M} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Así, la matriz de canal \mathbf{H} se puede componer en el producto de tres matrices,

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}_N^H \mathbf{S} \mathbf{B}_M \quad (2.3)$$

Estando ante un canal estacionario, tanto \mathbf{B}_N como \mathbf{B}_M serán matrices rectangulares deterministas que dependen únicamente de la geometría de la antena. \mathbf{S} es una matriz rectangular aleatoria cuyos estadísticos se modelarán en función de las características angulares de la dispersión.

En nuestro escenario, las entradas del canal siguen una distribución gaussiana y los coeficientes que describen la dispersión son independientes, por lo que la matriz de dispersión \mathbf{S} está totalmente caracterizada por el perfil angular de potencia (PAS, *Power Angular Spectrum*) [5]. Esto nos lleva a que los elementos de esta matriz de dispersión serán gaussianos i.n.d.¹.

En [6] vimos que en general el PAS del receptor y del transmisor pueden ser magnitudes dependientes. En el caso de un medio con dispersión lo suficientemente rico, entonces es razonable asumir que el PAS en el receptor y el transmisor son independientes. Esto resulta muy positivo ya que si esta asunción es válida, entonces la distribución de potencia en las filas viene dada por el PAS en el receptor y la distribución de potencia en las columnas coincide con el PAS en el transmisor. El PAS en el receptor y en el transmisor están caracterizados respectivamente por los parámetros ASA (*Angular Spread of Arrival*, dispersión angular de salida en el transmisor) y ASD (*Angular Spread of Departure*, dispersión angular de llegada en el receptor). En este proyecto analizaremos el efecto de múltiples parámetros, entre los que se encuentra el ASD.

¹independientes y no idénticamente distribuidos

Teniendo en cuenta estos parámetros, la matriz \mathbf{S} se puede simplificar de la siguiente forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Sigma}_{ASA}^{\frac{1}{2}} \mathbf{G} \mathbf{\Sigma}_{ASD}^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

donde \mathbf{G} es una matriz aleatoria compleja cuyos componentes son i.i.d. y siguen una distribución gaussiana de varianza unidad. Por otro lado, $\mathbf{\Sigma}_{ASA}^{\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{\Sigma}_{ASD}^{\frac{1}{2}}$ son matrices diagonales deterministas cuya diagonal viene determinada por el perfil angular de potencia correspondiente en el transmisor ($\mathcal{P}_{ASD}(\mathbf{k})$) y en el receptor ($\mathcal{P}_{ASA}(\mathbf{k}')$). Estas matrices son normalizadas para que su traza sea 1.

Finalmente, podremos expresar la matriz de canal \mathbf{H} de la siguiente forma,

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}_N^H \mathbf{\Sigma}_{ASA}^{\frac{1}{2}} \mathbf{G} \mathbf{\Sigma}_{ASD}^{\frac{1}{2}} \mathbf{B}_M \quad (2.5)$$

Capítulo 3

Capacidad

3.1. Introducción

El primer objetivo principal de este proyecto es el estudio de la capacidad en un sistema MIMO masivo ante un canal realista y cómo varía esta en función de los diferentes parámetros, algunos ya comentados: el número de antenas M , la distancia entre las antenas d_t o la dispersión angular de salida ASD . Habiendo introducido ya los conceptos básico que hay tras los sistemas de comunicaciones MIMO, además de algunas de sus ventajas, en especial las ganancias en capacidad, exploraremos en este capítulo de forma detallada los límites que existen en cuanto a la capacidad de estos sistemas [7].

Cuando se habla de capacidad, es inevitable mencionar al que sería el pionero en este campo: Claude Shannon, apodado «el padre de la Teoría de la Información» cuando a finales de los cuarenta propone una teoría matemática en la que pone de manifiesto el concepto de capacidad, una unidad de medida para los canales de comunicaciones que determina la máxima velocidad de transferencia de información alcanzable con una probabilidad de error tan pequeña como queramos, asumiendo que no existen restricciones en la complejidad del codificador ni en el decodificador [8].

En este capítulo, realizaremos un repaso sobre la definición de capacidad de Shannon y el concepto de información mutua para después aplicar estas ideas a un canal MIMO de un único usuario en el que hay presente ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN). Presentaremos además diferentes definiciones de capacidad que aparecen bajo diferentes circunstancias, como el conocimiento que tengamos sobre el canal bien en el transmisor o en el receptor, estudiando el comportamiento en estos casos.

3.2. Información mutua y capacidad de Shannon

Como ya hemos mencionado, Claude Shannon, usando una teoría matemática de la comunicación, describió la capacidad C de un canal como la máxima velocidad a la que se puede realizar una comunicación, sin ninguna restricción en la complejidad del transmisor y el receptor. Shannon demostró que para cualquier velocidad que se encontrara por debajo de C , existen códigos de canal con los que obtener una probabilidad de error arbitrariamente pequeña. Así pues, para cualquier velocidad $R < C$ y cualquier probabilidad de error deseada (distinta de cero) P_e , existe el código que nos permite alcanzar P_e . La intuición nos dice que dicho código deberá tener una longitud muy larga, y que la complejidad de este codificador/decodificador será muy elevada. De hecho, dicha longitud y complejidad aumentan a medida que intentamos hacer que P_e disminuya. Además, Shannon demostró que los códigos que operan a $R > C$ no pueden alcanzar una probabilidad de error arbitrariamente pequeña. Por todo esto, la capacidad de canal es un límite fundamental de la comunicación.

Aunque teóricamente no encontramos problemas a la hora de comunicarnos a una velocidad por debajo de la capacidad, en la práctica es altamente difícil diseñar códigos con una longitud y complejidad razonable que operen a velocidades cercanas a la capacidad. En las últimas décadas se han hecho enormes progresos en cuanto al diseño de estos códigos y de hecho existen códigos reales que operan a velocidades muy cercanas a la capacidad en ciertos canales, como canales Gaussianos con una única antena. Sin embargo, estos códigos no pueden utilizarse directamente en canales MIMO, ya que en estos canales se explota también la dimensión especial.

3.2.1. Definición matemática de capacidad

El trabajo realizado por Shannon muestra que la capacidad de canal se puede caracterizar de forma simple en términos de la información mutua entre la entrada X y la salida Y del canal, entre las cuales existe una relación probabilística caracterizada habitualmente por la distribución de Y condicionada a X , $f(y|x)$. Así pues, la información mutua de un canal de un único usuario se define como

$$I(X; Y) = \int_{X,Y} f(x, y) \log \left(\frac{f(x, y)}{f(x)f(y)} \right) dx dy \quad (3.1)$$

donde $f(x)$ y $f(y)$ denotan la distribución de probabilidad de las variables aleatorias X e Y , y $f(x, y)$ es la probabilidad conjunta de ambas variables.

La información mutua se puede escribir también como la diferencia entre la entropía de la salida del canal y la entropía de la salida condicionada a la entrada,

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (3.2)$$

donde

$$H(Y) = \int_Y f(y) \log \left(\frac{1}{f(y)} \right) dy \quad (3.3)$$

y

$$H(Y|X) = \int_{X,Y} f(y|x) \log \left(\frac{1}{f(y|x)} \right) dx dy \quad (3.4)$$

Shannon mostró que la capacidad de canal es la información mutua del canal maximizada sobre todas las posibles distribuciones probabilísticas de la entrada X :

$$C = \max_{f(x)} I(X; Y) = \max_{f(x)} [H(Y) - H(Y|X)] \quad (3.5)$$

Para un canal AWGN invariante con el tiempo y una relación señal a ruido **SNR**, la distribución que maximiza la ecuación anterior es la Gaussiana, resultando en la capacidad de canal

$$C = \log_2 (1 + \text{SNR}) \quad (3.6)$$

La definición de entropía e información mutua es la misma cuando la entrada y salida del canal son, en lugar de magnitudes escalares como en este desarrollo, vectores como en el caso de un canal MIMO; y por lo tanto, la capacidad de este canal MIMO estará basada en la máxima información mutua entre los vectores de entrada \mathbf{x} y salida \mathbf{y} , como veremos en profundidad en 3.3.

Es importante tener en cuenta que el desarrollo matemático visto en esta sección es válido para canales invariantes en el tiempo. Veremos a continuación qué ocurre cuándo los canales varían en el tiempo.

3.3. Canales MIMO

La capacidad de un canal MIMO es la extensión de la fórmula de la información mutua para un canal SISO ya mencionada, para una matriz de

canal. Para canales estáticos, podemos obtener de forma relativamente fácil una buena estimación de \mathbf{H} en el receptor, así que asumiremos CSIR a partir de ahora. Bajo esta asunción, la capacidad será

$$C = \max_{f(x)} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \max_{p(x)} [H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}|\mathbf{X})] \quad (3.7)$$

siendo $H(\mathbf{Y})$ y $H(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ la entropía en \mathbf{y} y en $\mathbf{y}|\mathbf{x}$, respectivamente.

La definición de entropía nos lleva a que $H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = H(\mathbf{N})$, es decir, la entropía del ruido. Dado que el ruido \mathbf{n} tiene una entropía fija independiente de la entrada del canal, maximizar la información mutua es equivalente a maximizar la entropía en \mathbf{y} .

Dada la matriz de covarianza \mathbf{R}_x del vector de entrada \mathbf{x} , la matriz de covarianza de salida \mathbf{R}_y asociada con la salida \mathbf{y} del canal MIMO viene dada por

$$\mathbf{R}_y = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^H] = \mathbf{H}\mathbf{R}_x\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_N \quad (3.8)$$

Además, para todos los vectores aleatorios con una matriz de covarianza \mathbf{R}_y , la entropía de \mathbf{y} es máxima cuando \mathbf{y} es de media cero, con simetría circular compleja Gaussian (ZMCSCG, *Zero-mean Circularly Symmetric Complex Gaussian*). Pero para que \mathbf{y} sea ZMCSCG, forzosamente \mathbf{x} debe ser ZMCSCG, por lo que esta es la distribución óptima de \mathbf{x} bajo la restricción de potencia de $\text{Tr}(\mathbf{R}_x) = P$. Así, tenemos $H(\mathbf{Y}) = \log_2 \det[\pi e \mathbf{R}_y]$ y $H(\mathbf{n}) = \log_2 \det[\pi e \mathbf{R}_n]$, que resulta en la siguiente expresión de información mutua

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &= H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{n}) \\ &= \log \det(\pi e \mathbf{R}_x) - \log \det(\pi e \mathbf{R}_n) \\ &= \log \frac{\det(\pi e \mathbf{R}_y)}{\det(\pi e \mathbf{R}_n)} \\ &= \log \det(\mathbf{R}_y \mathbf{R}_n^{-1}) \\ &= \log \det((\mathbf{H}^H \mathbf{R}_x \mathbf{H} + \mathbf{R}_n) \mathbf{R}_n^{-1}) \\ &= \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{H}^H \mathbf{R}_x \mathbf{H} \mathbf{R}_n) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si tenemos en cuenta que la matriz de correlación del ruido será de la siguiente forma $\mathbf{R}_n = \sigma^2 \mathbf{I}$, tendremos

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \log \det(\mathbf{I} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}^H \mathbf{R}_x \mathbf{H}) \quad (3.10)$$

Si normalizamos la matriz de correlación \mathbf{R}_x con respecto a la potencia P y además la transformamos de tal forma que su traza sea siempre igual a M , $\mathbf{R}'_x = \frac{P}{M} \mathbf{R}_x$

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) &= \log \det(\mathbf{I} + \frac{P}{M\sigma^2} \mathbf{H}^H \mathbf{R}'_{\mathbf{x}} \mathbf{H}) \\
&= \log \det(\mathbf{I} + \frac{\text{SNR}}{\sigma^2} \mathbf{H}^H \mathbf{R}'_{\mathbf{x}} \mathbf{H})
\end{aligned} \tag{3.11}$$

por lo que nuestra definición de capacidad será la siguiente

$$C = \max_{Tr(\mathbf{R}_{\mathbf{x}})=M} E \left\{ \log \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{\text{SNR}}{M} \mathbf{H} \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \mathbf{H}^H \right) \right\} \tag{3.12}$$

donde $\det[\mathbf{A}]$ denota el determinante de la matriz \mathbf{A} . Como se puede ver claramente, la optimización relativa a $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ dependerá de si \mathbf{H} es conocida o no en el transmisor, por lo que a continuación consideraremos dicha optimización bajo diferentes situaciones sobre lo que conocemos acerca del CSI (*Channel State Information*) del canal en el transmisor.

La capacidad de un canal MIMO depende en gran medida de las propiedades estadísticas del canal y de la correlación que se deriva de los elementos radiantes. Esta correlación varía drásticamente como una función de la dispersión existente en el entorno, de la distancia entre el transmisor y el receptor, la configuración de las antenas y la dispersión Doppler. Como veremos en las simulaciones mostradas en la sección 3.6, el efecto de la correlación en la capacidad depende del conocimiento que tengamos del canal en el transmisor y en el receptor; la correlación aumentará la capacidad en algunos casos y la reducirá en otros.

Cuando estamos ante un canal que varía con el tiempo la capacidad de canal tiene múltiples definiciones, dependiendo de la información que tengamos sobre el canal o su distribución en el transmisor y/o en el receptor, como veremos a continuación.

Cuando conocemos perfectamente en el transmisor y en el receptor las ganancias instantáneas del canal, también llamadas información de estado del canal (*channel state information*, **CSI**), el transmisor puede adaptar su estrategia de transmisión (bien la velocidad o la potencia) en base a este estado del canal. En este caso la capacidad ergódica ¹ es la máxima información mutua promediada sobre todos los estados del canal. En condiciones de CSI en el transmisor (CSIT), la capacidad ergódica se puede alcanzar utilizando una estrategia de transmisión adaptativa donde la potencia y la velocidad

¹Llamarlo ergódico esencialmente significa que una muestra relativamente larga de las realizaciones del canal tiene una distribución similar la distribución estadística del canal. La capacidad ergódica es una métrica de capacidad apropiada para canales que varían rápidamente, o en canales que se comportan de forma ergódica en el período que nos interesa observar.

varían en función de las variaciones existentes en el estado del canal. En este caso de estrategias adaptativas, la velocidad varía como una función del estado instantáneo del canal y la capacidad ergódica se refiere al máximo promedio (de larga duración) posible de las velocidades instantáneas. Por lo tanto, no es necesario que el canal varíe rápidamente durante una palabra de código ya que la capacidad ergódica es significativa incluso en entornos con desvanecimiento relativamente lento y donde los promedios de larga duración son de interés también.

Cuando sólo conocemos la distribución del canal en alguno de los extremos de la comunicación, bien en el transmisor o en el receptor, la estrategia en este extremo se basa en la distribución del canal en lugar del estado instantáneo del canal, como hacíamos en el caso anterior. Este caso se conoce como **CDI**, *channel distribution information*, específicamente CDIT o CDIR cuando el conocimiento es en el transmisor o en el receptor, respectivamente. Típicamente, se asume que los coeficientes del canal son conjuntamente Gaussianos, por lo que la distribución del canal viene determinada por la media del canal y las matrices de covarianza. Cuando solo existe perfecto CSI en el transmisor o en el receptor, el transmisor debe mantener una estrategia de transmisión de velocidad fija, optimizada con respecto a su CSI. En este caso la capacidad ergódica define la velocidad que puede alcanzarse basada en el promedio sobre todos los estados del canal. Alternativamente, el transmisor puede emitir a una velocidad no soportada por todos los estados del canal; en esos estados “pobre” la información transmitida se pierde.

En nuestro caso, en el que nos encontramos en canales que varían con el tiempo, calcularemos la capacidad ergódica calculando la media entre todas las realizaciones.

3.4. Descomposición de un canal MIMO en múltiples canales paralelos

Puede resultar muy útil descomponer un canal MIMO en un número K de canales paralelos e independientes [9]. Multiplexando los datos independientes en estos canales independientes, podemos multiplicar por K la velocidad de transmisión de datos si la comparamos con un sistema con una única antena en transmisión y recepción. A este aumento en la velocidad se le llama ganancia de multiplexación y a continuación mostraremos cómo realizar esta descomposición.

Considerando un canal MIMO con una matriz de canal \mathbf{H} de dimensiones $[N \times M]$, conocida en el transmisor y en el receptor. Como se indica en el apéndice A, para cualquier matriz podemos obtener su descomposición en valores singulares, SVD.

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H \quad (3.13)$$

donde las matrices \mathbf{U} ($N \times N$) y \mathbf{V} ($M \times M$) son matrices unitarias y $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz diagonal de dimensiones ($N \times M$) compuesta por los valores singulares (σ_i) de \mathbf{H} . Estos valores singulares cumplen la propiedad de que $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, siendo λ_i los autovalores de la matriz \mathbf{H} .

Esta descomposición en canales paralelos se lleva a cabo realizando transformaciones tanto en el receptor como en el transmisor del sistema MIMO. En el transmisor se realiza una precodificación al vector de entrada \mathbf{x} de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}}$ y en el receptor se realiza una operación similar multiplicando la salida \mathbf{y} por la matriz \mathbf{U}^H .

De esta forma habremos transformado el canal MIMO en R_H ² canales paralelos SISO (*Single input single output*) cuyas entrada y salida serán $\tilde{\mathbf{x}}$ y $\tilde{\mathbf{y}}$ respectivamente.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} &= \mathbf{U}^H(\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{U}^H(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H\mathbf{x} + \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{U}^H(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H\mathbf{V}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{U}^H\mathbf{n} \\ &= \mathbf{\Sigma}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{U}^H\mathbf{n}$ (lo que no hace que cambie la distribución del ruido al ser \mathbf{U} unitaria) y $\mathbf{\Sigma}$ es la matriz cuya diagonal está formada por los valores singulares de \mathbf{H} y es nula fuera de la diagonal. En resumen, la transformación que estamos empleando hace que el canal MIMO se transforme en R_H canales paralelos e independientes con entrada \tilde{x}_i , salida \tilde{y}_i , ruido \tilde{n}_i y ganancia σ_i . Dado que estos R_H canales son independientes (no interfieren entre ellos) la complejidad de la demodulación óptima ML es lineal en R_H , el número de señales independientes que hemos de demodular. Además, al enviar información por estos canales independientes, la velocidad que puede soportar este canal MIMO será R_H veces la velocidad soportada por un sistema con una única antena en transmisión. Sin embargo, cómo de bien se comporte un canal dependerá por completo de su ganancia asociada (σ_i).

² R_H denota el rango de la matriz \mathbf{H} . El rango de una matriz es el máximo entre el número de filas linealmente independientes y el número de columnas independientes, por lo que siempre se cumplirá que $R_H \leq \min(M, N)$. La matriz \mathbf{H} tendrá R_H autovalores distintos de cero.

3.5. Estrategias de transmisión

Recordemos que, fijando la potencia transmitida a P , la capacidad ergódica será

$$C = \max_{\text{Tr}(\mathbf{Q}) \leq P} E \left\{ \log \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{\text{SNR}}{M} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^H \right) \right\} \quad (3.15)$$

donde \mathbf{Q} es la matriz de covarianza de la señal de entrada.

Para alcanzar el máximo, habremos de optimizar la matriz de covarianza de la señal transmitida ($\mathbf{Q} = \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{V}^H$) definiendo así la estrategia de transmisión basada en la información disponible del transmisor. Analizaremos a continuación dos escenarios diferentes en base a esta información: CSIT, cuando conocemos el canal en el transmisor, y CDIT, cuando conocemos la distribución estadística del canal.

Como se ve en la ecuación (3.15), la matriz de correlación es un parámetro que afecta enormemente a la capacidad. El estudio de esta matriz de correlación y su efecto en sistemas de comunicaciones con múltiples antenas se puede encontrar en [10, 11, 12] y viene caracterizado por completo por la separación entre antenas en el transmisor y el receptor así como por un modelo estadístico que describe la dispersión dada por el perfil angular de potencia [13, 5].

3.5.1. CSIT: Conocido el canal en el transmisor

Con CSIT, asumimos que la matriz de canal \mathbf{H} es conocida instantáneamente en el transmisor. Cuando el transmisor conoce esta matriz, asumimos de la misma forma que conoce la distribución perfectamente (ya que la distribución se puede obtener a partir de las observaciones instantáneas).

En este primer caso, la matriz \mathbf{V} estará formada por los autovalores de la correlación en el transmisor $E \{ \mathbf{H}^H \mathbf{H} \}$.

Dado que los canales paralelos en los que se descompone en el canal no son, como es esperable, idénticos sino que tienen diferente calidad, la asignación del nivel de potencia para cada canal (la matriz \mathbf{P} se hará utilizando el algoritmo Water-Filling. Este algoritmo, como nos adelanta su nombre, compara la asignación de potencia de los diferentes canales con recipientes que se van llenando de agua. Así, este algoritmo nos lleva a

$$P_i = \left(\mu - \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^+, 1 \leq i \leq R_H \quad (3.16)$$

donde P_i es la potencia correspondiente \tilde{x}_i , x^+ se define como $\max(x, 0)$, y el nivel de “llenado de agua” μ se elige de tal forma que $\sum_{i=1}^{R_H} P_i = P$.

La capacidad por tanto se alcanza eligiendo cada componente \tilde{x}_i de acuerdo a una distribución Gaussiana independiente con potencia P_i . La covarianza que hace máxima la expresión es $\mathbf{Q} = \mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{V}^H$, donde la matriz \mathbf{P} es una matriz diagonal definida como $\mathbf{P} = \text{diag}(P_1, \dots, P_{R_H}, 0, \dots, 0)$. La capacidad resultante será

$$C = \sum_i^{R_H} (\log(\mu\sigma_i^2))^+ \quad (3.17)$$

Para niveles bajos de SNR, el algoritmo de Water-Filling distribuye la potencia disponible colocándola en el canal paralelo cuya ganancia sea mayor. Para altos niveles de SNR, este algoritmo administra la potencia adjudicando a cada canal aproximadamente la misma, llevándonos a la siguiente aproximación de la capacidad para altos valores de SNR:

$$C \approx R_H \log_2(P) + O(1) \quad (3.18)$$

donde la constante depende de los valores singulares de \mathbf{H} .

De esta estrategia de transmisión podemos extraer varias conclusiones. En primer lugar, la multiplicación de \mathbf{V} por la entrada consiste en una precodificación que alinea dichas entradas con los modos propios del canal. Esto quiere decir que, haciendo una simple multiplicación de las señales de salida, podremos tratarlas como observaciones independientes. Además, el transmisor aplica la estrategia de Water-Filling haciendo uso de los diferentes modos del canal, para aprovechar la diferente calidad de los canales paralelos.

3.5.2. CDIT: Conocida la distribución del canal en el transmisor

En un escenario con CDIT, la optimización de la matriz de covarianza \mathbf{Q} , descrita por $\mathbf{Q} = \mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{V}^H$ suele descomponerse separadamente en la optimización de los autovalores \mathbf{P} (que definen la distribución de potencia) y los autovectores \mathbf{V} [14, 15, 16].

En esta sección propondremos dos algoritmos diferentes y en el capítulo 3.6.5 analizaremos el comportamiento de cada uno de ellos.

En primer lugar, los autovectores que maximizan (3.15) son los de la correlación en el transmisor $E\{\mathbf{H}^H\mathbf{H}\}$. Para hallar la distribución óptima de potencia haremos uso del algoritmo propuesto en [16]. Este algoritmo propone una distribución de potencia basada en el MMSE³. Este algoritmo es válido cuando los autovalores \mathbf{V} son conocidos.

³Minimum Mean Square Error, mínimo error cuadrático medio

Definimos una versión rotada del canal, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\mathbf{V}$, cuya columna j -ésima se denota como $\hat{\mathbf{h}}_j$. Como se muestra en el apéndice B de [16], para alcanzar la capacidad la matriz \mathbf{P} debe cumplir la condición suficiente y necesaria descrita a continuación

$$\frac{1}{N}E \left[\text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{I} + \text{MMSE} \hat{\mathbf{h}}_j \hat{\mathbf{h}}_j^H \right) \left(\mathbf{I} + \frac{\text{SNR}}{M} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{P} \hat{\mathbf{H}}^H \right)^{-1} \right\} \right] \begin{cases} = 1 & \text{si } p_j > 0 \\ \leq 1 & \text{si } p_j = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Dado que los canales paralelos correspondientes no son ortogonales ⁴, esta solución no se corresponde con un Water-Filling. La inecuación (3.19) indica que cuando nos encontramos por debajo de una determinada SNR la potencia transmitida por algunos de los canales será nula.

Así pues, la potencia inyectada en cada canal canal descrita en la matriz \mathbf{P} no puede ser hallada de forma explícita por lo que se propone un algoritmo basándonos en el error cuadrático medio para lo que, en primer lugar, se define

$$\mathbf{B}_j \triangleq \left(\mathbf{I} + \frac{\text{SNR}}{M} \hat{\mathbf{H}}_j \mathbf{P}_j \hat{\mathbf{H}}_j^H \right)^{-1} \quad (3.20)$$

donde $\hat{\mathbf{H}}_j$ es la matriz obtenida eliminando la columna j -ésima de \mathbf{H} y \mathbf{P}_j es la matriz diagonal obtenida eliminando la fila y columna j -ésima. Así, el MMSE resultante de la estimación lineal de la señal s_j transmitida a través del autovector j -ésimo es

$$\text{MMSE} = \frac{1}{1 + p_j \frac{\text{SNR}}{M} \hat{\mathbf{h}}_j^H \mathbf{B}_j \hat{\mathbf{h}}_j} \quad (3.21)$$

La potencia recibida de la señal j -ésima viene dada por $1 - \text{MMSE}_j$ y por lo tanto la SINR ⁵ viene dada por la siguiente expresión

$$\text{SINR}_j = \frac{1 - \text{MMSE}}{\text{MMSE}} \quad (3.22)$$

La esperanza de (3.21) con respecto a $\hat{\mathbf{H}}$ se denota como

$$\overline{\text{MMSE}}_j \triangleq E[\text{MMSE}_j] \quad (3.23)$$

⁴En contraste con el escenario en el que \mathbf{H} es conocido en el transmisor (CSIT), caso en el que los canales paralelos pueden ser creados para que sean ortogonales y la distribución de potencia se reduce a un Water-Filling

⁵Signal-to-interference-and-noise ratio

Además, se puede verificar que

$$\text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{I} + \frac{\text{SNR}}{M} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{P} \hat{\mathbf{H}}^H \right)^{-1} \right\} = \sum_{l=1}^M \text{MMSE}_l + N - M \quad (3.24)$$

Usando (3.20) y (3.24), las condiciones enunciadas en un principio en (3.19) se pueden reescribir finalmente como

$$\begin{cases} p_j = 0 & \frac{\text{SNR}}{M} E \left[\hat{\mathbf{h}}_j^H \mathbf{B}_j \hat{\mathbf{h}}_j \right] \leq \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M (1 - \overline{\text{MMSE}}_l) \\ p_j = \frac{1 - \overline{\text{MMSE}}_j}{\frac{1}{M} \sum_{l=1}^M (1 - \overline{\text{MMSE}}_l)} & \text{en el resto de casos} \end{cases} \quad (3.25)$$

Este algoritmo iterativo converge rápidamente a los valores buscados de potencia.

En segundo lugar y en este mismo escenario de CDIT, realizaremos también simulaciones no sólo con este algoritmo sino con una estrategia de transmisión de **beamforming generalizado** (BF). En este caso, en lugar de tratar de optimizar la matriz de potencia \mathbf{P} como hacíamos anteriormente, inyectaremos toda la potencia en una de las antenas transmisoras.

Como veremos a continuación en la sección 3.6.5, para bajos niveles de SNR, el algoritmo de beamforming arroja unos resultados similares al explicado en esta sección y que realiza una optimización de la distribución de potencia. A medida que la SNR va aumentando, las prestaciones del beamforming se muestran peores que las obtenidas a través de este algoritmo.

3.6. Resultados de las simulaciones

Las simulaciones que hemos realizado para hallar la capacidad de estos sistemas han variado, de nuevo, los parámetros en el transmisor: distancia entre antenas transmisoras y ángulos de dispersión en el transmisor. Además, se han realizado varias pruebas con diferente números de antenas y en escenarios con diferente SNR.

Para extraer conclusiones de las simulaciones realizadas nos interesan especialmente los resultados pertenecientes a los escenarios asintóticos, es decir, para altas SNR y bajas SNR (sobre todo este último) [17]. Mostraremos de igual forma la evolución de la capacidad con respecto a este parámetro.

En todos los casos estudiados se representarán los resultados tanto para un sistema MIMO masivo con M antenas en el transmisor y 4 antenas en el receptor como para un sistema MIMO con el mismo número de antenas transmisoras que receptoras.

3.6.1. Parámetros para las simulaciones

Como ya hemos comentado, para realizar las simulaciones nos centraremos en el enlace descendente y en un escenario MIMO de un solo usuario.

En primer lugar, y dado que la dispersión angular de elevación será mucho menor que la dispersión azimutal, sólo tendremos en cuenta para las simulaciones este último, que será muestreado de forma uniforme en $\theta \in (0, 2\pi)$. Además, tanto las antenas en transmisión como en recepción (ambas omnidireccionales) estarán dispuestas de tal manera que formen un array lineal, separadas una distancia d_t y d_r en transmisión y recepción, respectivamente. El perfil angular de potencia en la BS tiene una distribución *broadside* y Laplaciana en azimut caracterizada por la dispersión angular en el transmisor (ASD) mientras que en el receptor asumimos una distribución uniforme caracterizada también por su dispersión angular (ASA).

Las condiciones más desfavorables en términos de correlación se darán en la BS donde, al estar situada la BS en un lugar normalmente elevado, los valores de ASD serán pequeños. Teniendo esto en cuenta, realizaremos las simulaciones centrándonos en el transmisor y los parámetros del mismo: M , número de antenas; d_t , distancia entre antenas transmisoras y ASD, dispersión angular en el transmisor.

3.6.2. Evolución de la capacidad con respecto a la SNR

A lo largo de esta sección presentaremos los resultados de los tres algoritmos comentados pero no haremos énfasis en el análisis del algoritmo de beamforming generalizado (CDIT) pues como se verá en la sección 3.6.5 sólo igualará al algoritmo propuesto para el escenario CDIT cuando la SNR es baja. Por ello, en adelante nos centraremos en la comparación entre el Water-Filling implementado para CSIT y el algoritmo propuesto para CDIT.

3.6.2.1. Sistema MIMO con el mismo número de antenas transmisoras y receptoras

Se muestra en las figuras (3.1) y (3.2) el comportamiento de la capacidad en un escenario de CSIT y otro de CDIT (diferenciando entre las dos estrategias de transmisión propuestas) frente a la SNR para diferentes valores de ASD y d_t .

En primer lugar en la figura (3.1) nos encontramos en un escenario típico en el que la distancia entre antenas transmisoras es igual a $\frac{\lambda}{2}$ mientras que en (3.2) forzamos un escenario en el que no exista apenas correlación, aumentando la separación entre antenas hasta λ . En ambos casos, se ve cómo la estrategia de beamforming generalizado en el escenario CDIT nunca es

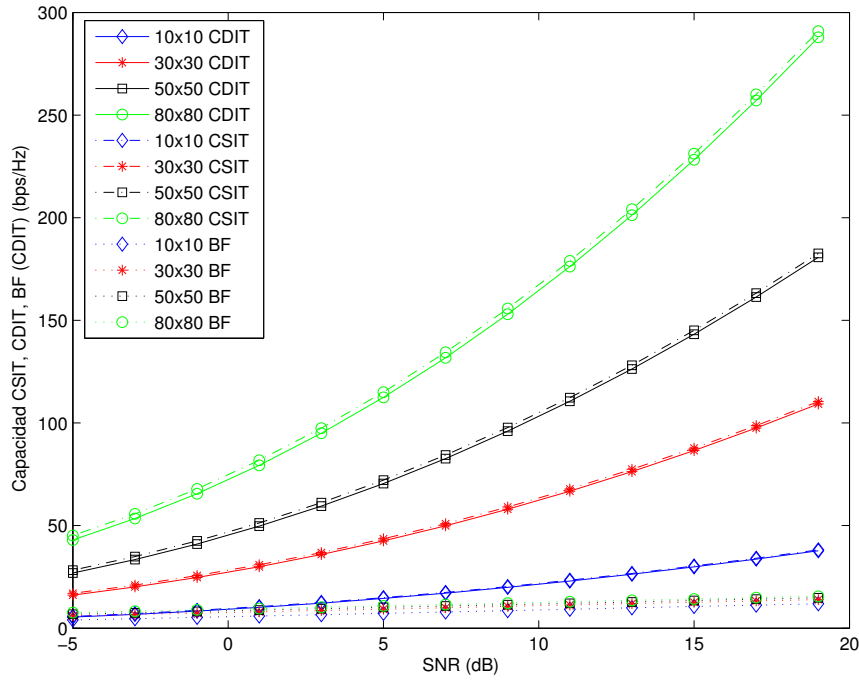
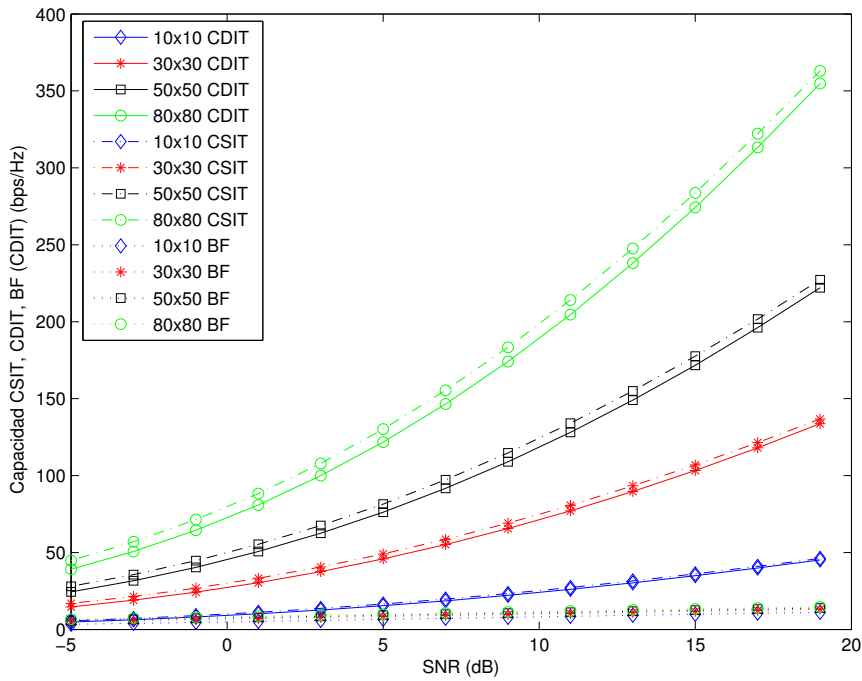
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $ASD = 20^\circ$

Figura 3.1: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) para un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras y en el que $d_t = \frac{\lambda}{2}$

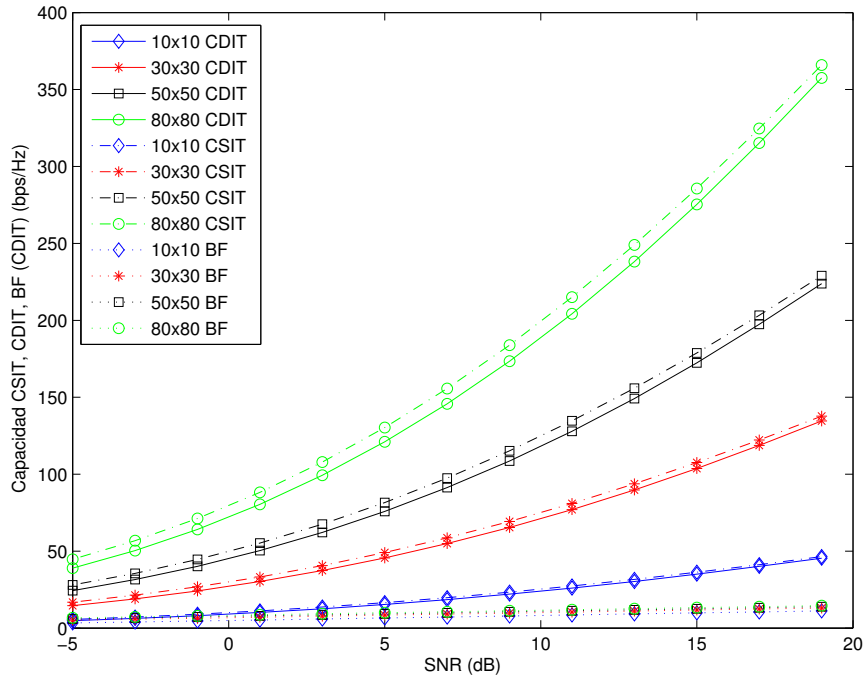
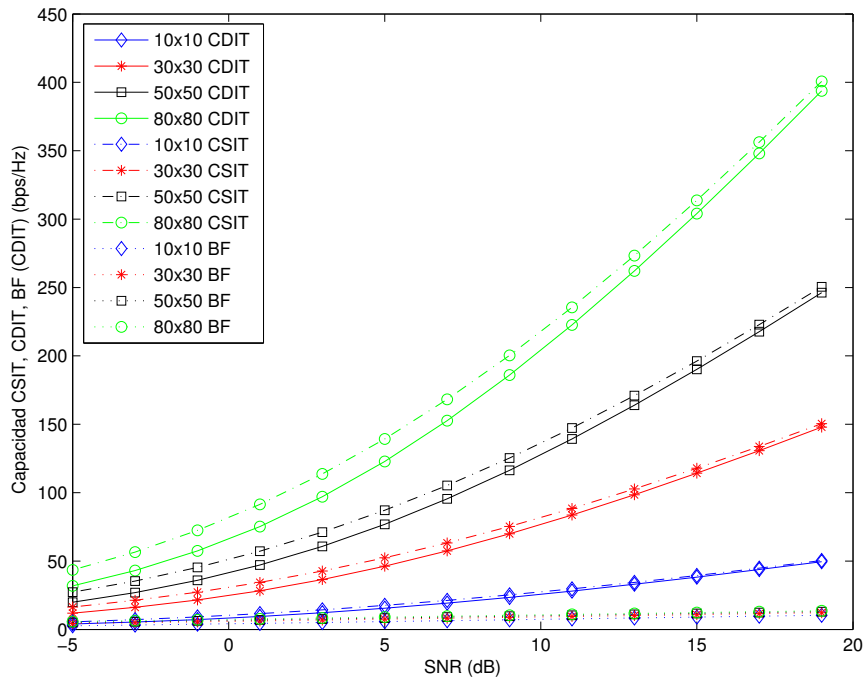
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $ASD = 20^\circ$

Figura 3.2: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) para un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras y en el que $d_t = \lambda$

óptima frente al resto y, en cuanto a la empleada en CSIT y CDIT, el Water-Filling utilizado en el primer caso supera siempre al algoritmo empleado en el escenario CDIT. Además, esta diferencia es mayor cuanto menor es el nivel de SNR y va disminuyendo conforme aumenta este parámetro.

Para ilustrar de forma más clara los resultados obtenidos, lo haremos a través de la tabla 3.1 en la que se comparan los valores obtenidos de capacidad para un escenario de $ASD = 10^\circ$ y $d_t = \frac{\lambda}{2}$ y para diferentes valores tanto de SNR como del número de antenas. De nuevo, con respecto a este último parámetro, nos interesa conocer el comportamiento en los extremos; es decir, en escenarios con pocas antenas o muchas antenas, especialmente este último.

Mostraremos en estas tablas los resultados para el escenario CSIT y el CDIT, pues como comprobaremos en la sección 3.6.5 el algoritmo de beamforming nunca superará al propuesto en la sección 3.5.2 por lo que no tendremos en cuenta dicha estrategia en esta comparación.

Como se ve en la tabla 3.1, en estas condiciones la diferencia entre los dos algoritmos es muy pequeña. Evidentemente, los resultados obtenidos en CSIT son mejores que los obtenidos en CDIT, pues al tener conocimiento del canal y no únicamente de sus estadísticos, las condiciones son mejores. El algoritmo Water-Filling empleado en el escenario CSIT proporciona entre 0.3 y 0.4 bps/Hz más que el algoritmo implementado para el escenario CDIT y la diferencia entre estos dos casos aumenta muy poco a medida que los valores de la SNR aumentan.

Sin embargo, al observar los datos correspondientes a 60 y 80 antenas podemos ver que con un número elevado de antenas en transmisión y en recepción la diferencia entre los dos escenarios se hace notable. Con 60 antenas la diferencia entre los dos casos es de alrededor de 2 bps/Hz y la variación con respecto a la SNR es mayor que la que teníamos para 10 antenas. Por último, para 80 antenas es cuando la diferencia entre los dos escenarios se hace mayor partiendo desde 2.16 bps/Hz para una SNR de -5 dB y llegando hasta 3 bps/Hz para 19 dB. Estos 3 bits extra que estamos consiguiendo en el caso CSIT son 3 bits más que podemos incluir en la constelación y aumentar de esta forma el número de símbolos posibles a transmitir.

3.6.2.2. Sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 antenas receptoras

En las figuras (3.3) y (3.4) se puede ver la evolución de la capacidad con respecto a la SNR para diferentes valores de ASD y d_t . En cada gráfica se muestra además dicha capacidad para diferente número de antenas.

De igual forma que hacíamos en la sección anterior, observaremos de forma más clara los resultados obtenidos en una tabla en la que podamos comparar

	10 antenas			60 antenas			80 antenas			
	CSIT	CDIT	Diferencia	CSIT	CDIT	Diferencia	CSIT	CDIT	Diferencia	
SNR (dB)	-5	5,760	5,404	0,302	33,87	32,23	1,64	45,12	42,96	2,16
	1	10,51	10,16	0,35	61,45	59,59	1,86	81,8	79,34	2,46
	5	14,89	14,51	0,38	86,45	84,48	1,97	115	112,4	2,6
	9	20,28	19,88	0,4	117,1	115	2,1	155,8	153	2,8
	15	30,27	29,84	0,43	173,8	171,6	2,2	231,2	228,2	3
	19	38,16	37,73	0,43	218,7	216,5	2,2	290,9	287,9	8,55

Tabla 3.1: Capacidad (bps/Hz) para un sistema MIMO masivo con el mismo número de antenas en transmisión que en recepción. Comparación entre los escenarios CSIT y CDIT para 10, 60 y 80 antenas.

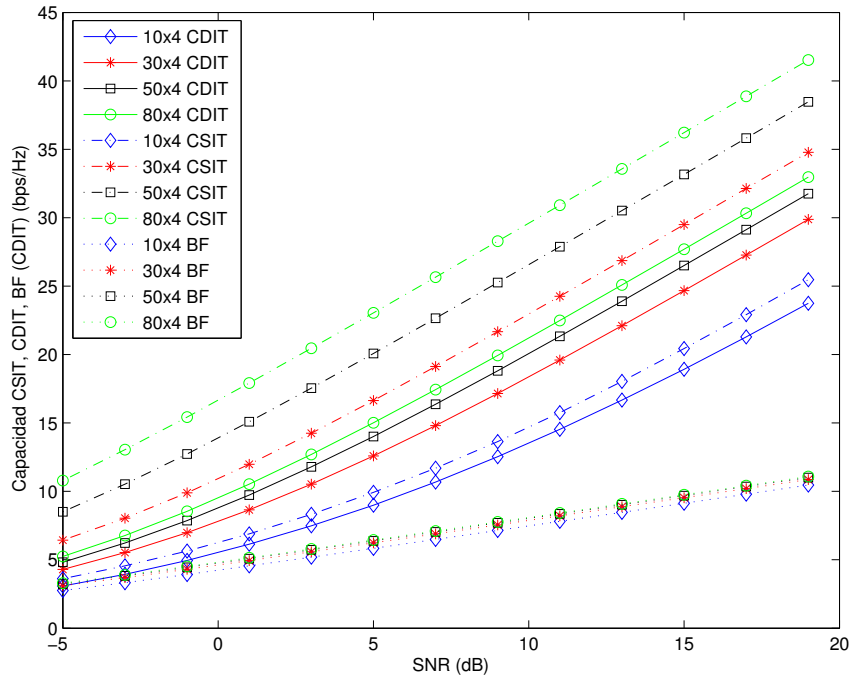
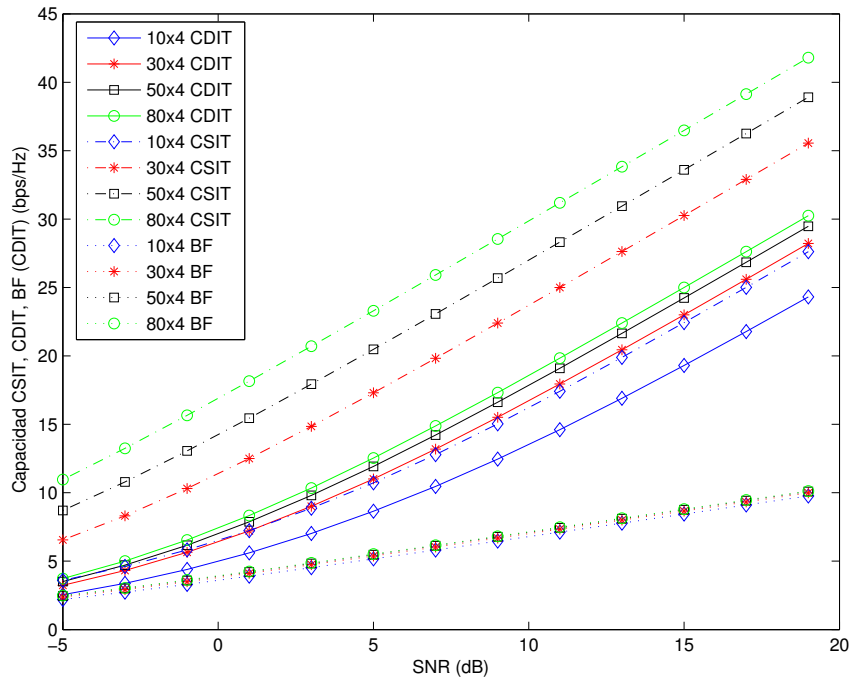
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $ASD = 20^\circ$

Figura 3.3: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) para un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras y en el que $d_t = \frac{\lambda}{2}$

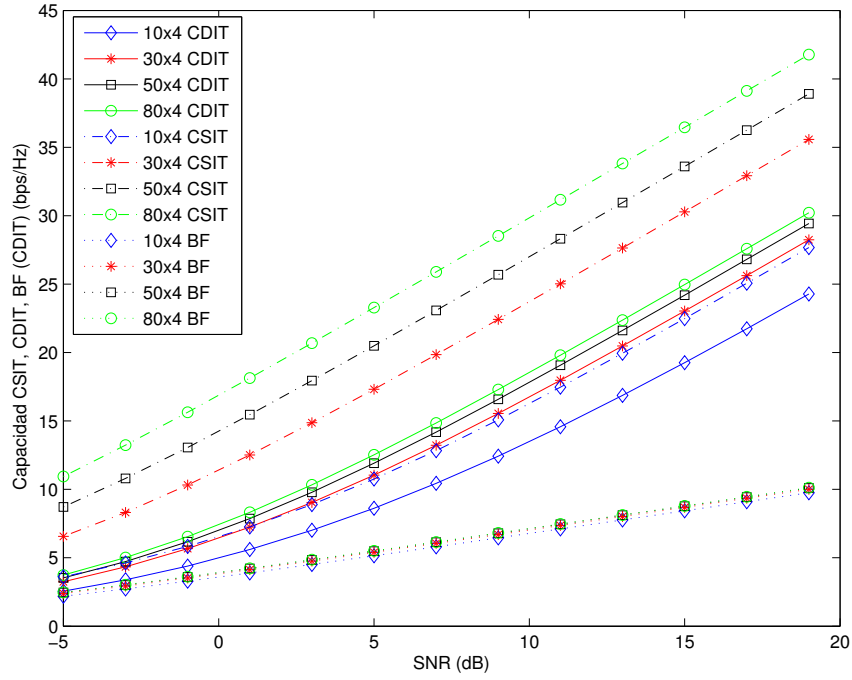
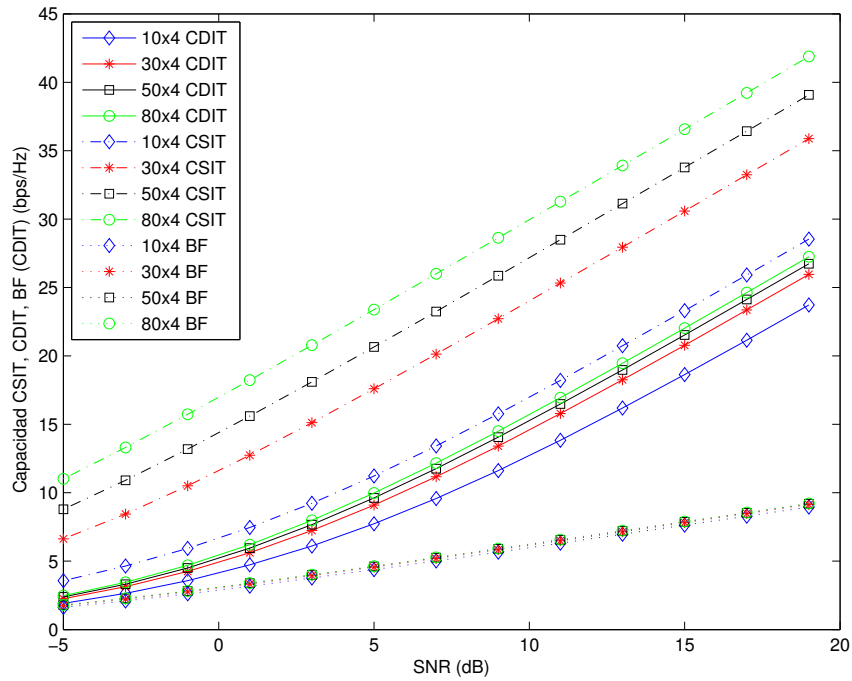
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $ASD = 20^\circ$

Figura 3.4: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) para un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras y en el que $d_t = \lambda$

el comportamiento en los dos escenarios con respecto a la **SNR** y al número de antenas transmisoras.

En primer lugar, en la tabla 3.2 encontramos los resultados para un escenario con 10, 60 y 80 antenas en transmisión y 4 en recepción. Para 10 antenas, la diferencia entre las dos estrategias oscila en torno a 1 bps/Hz, una diferencia mayor a la que obteníamos para el caso de 10 antenas transmisoras y receptoras. Podemos ver como esta diferencia se hace mucho mayor cuando aumentamos el número de antenas transmisoras. Para el caso de 60 la diferencia va desde 4.319 bps/Hz hasta 7.37 bps/Hz y para 80 antenas, esta diferencia varía desde 5.544 bps/Hz para una **SNR** de -5 dB hasta 8.55 bps/Hz para una **SNR** de 19 dB.

3.6.3. Alta SNR

Antes de presentar los resultados obtenidos a través de la simulaciones realizadas, cabe destacar que existen aproximaciones analíticas para calcular la capacidad y la eficiencia espectral de un sistema de comunicaciones tanto para altas **SNR** como para bajas. Para ello, a menudo es conveniente expresar la capacidad no sólo como una función de la relación señal a ruido sino también de la energía por bit transmitida relativa al nivel de ruido $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E[||\mathbf{x}||^2]}{N_0 C(\text{SNR})} = \frac{\text{SNR}}{g C(\text{SNR})} \quad (3.26)$$

De [17], para valores elevados de **SNR** la capacidad se comporta de la siguiente forma:

$$C(\text{SNR}) = S_\infty \left(\frac{\text{SNR}}{3\text{dB}} - L_\infty \right) + o(1) \quad (3.27)$$

donde S_∞ denota la pendiente a alta **SNR** en bps/Hz/(3 dB) y L_∞ representa el offset de potencia respecto a un canal de referencia ortogonal tal que $\frac{1}{M} \mathbf{H} \mathbf{H}^H = \mathbf{I}$. Relacionando la capacidad con $\frac{E_b}{N_0}$ obtenemos

$$\frac{E_b}{N_0} |_{\text{dB}} = \left(\frac{C}{S_\infty} + L_\infty \right) 3 \text{ dB} - 10 \log_{10} C - g |_{\text{dB}} + o(1) \quad (3.28)$$

Como se ve, S_∞ representa tanto la pendiente en términos de **SNR** como en términos $\frac{E_b}{N_0}$.

Hemos hecho uso de esta aproximación para comprobar si los resultados obtenidos en las simulaciones son coherentes.

	10 antenas			60 antenas			80 antenas			
	CSIT	CDIT	Diferencia	CSIT	CDIT	Diferencia	CSIT	CDIT	Diferencia	
SNR (dB)	-5	4	3,082	0,541	9,3	4,981	4,319	10,79	5,246	5,544
	1	6,893	6,137	0,756	16,1	10,02	6,08	17,91	10,53	7,38
	5	9,926	8,991	0,935	21,15	14,37	6,78	23,04	15,01	8,03
	9	13,64	12,53	1,11	26,35	19,22	7,13	28,28	19,94	8,34
	15	20,43	18,93	1,5	34,27	26,94	7,33	36,22	27,7	8,52
	19	25,46	23,74	1,72	39,57	32,2	7,37	41,52	32,97	8,55

Tabla 3.2: Capacidad (bps/Hz) para un sistema MIMO masivo con 4 antenas en recepción y 10, 60 y 80 antenas en transmisión. Comparación entre los escenarios CSIT y CDIT

3.6.3.1. Sistema MIMO con el mismo número de antenas transmisoras y receptoras

Para un valor de SNR de 19 dB se muestran los resultados de capacidad, comparándola en función de los diferentes escenarios expuestos. En primer lugar en la figura (3.5) podemos observar dicha comparación para dos valores concretos del ángulo de dispersión, por lo que podremos examinar su evolución con respecto a la distancia entre las antenas. A medida que esta aumenta, el valor de la capacidad lo hace también, como es de esperar pues cuando la correlación es menor nos encontramos en mejores condiciones.

En la figura (3.6) lo que podemos ver es la evolución con respecto a ASD , es decir, al ángulo de dispersión del transmisor. Estas gráficas tienen un comportamiento similar a una función logarítmica, es decir, crecen rápidamente cuando nos encontramos en valores del ASD bajos y se estabilizan a medida que este ángulo se hace mayor. Este comportamiento se acerca cada vez más a un comportamiento logarítmico a medida que nos encontramos en mejores condiciones (d_t aumenta), y el momento en el que empieza a tener un comportamiento constante sucede para valores menores del ASD .

En ambos casos las diferencias existentes entre los dos escenarios son mínimas, pues para valores elevados de SNR los algoritmos empleados en ambos casos tienen muy buena respuesta.

3.6.3.2. Sistema MIMO masivo con M antenas transmisoras y 4 antenas receptoras

De nuevo, para un valor de SNR de 19 dB se muestran los resultados de capacidad, comparándola en función de los diferentes escenarios expuestos. En primer lugar en la figura (3.7) podemos observar dicha comparación para dos valores concretos del ángulo de dispersión, por lo que podremos examinar su evolución con respecto a la distancia entre las antenas; mientras que en la figura (3.8) lo que veremos será la evolución con respecto al ángulo de dispersión.

Mientras que el comportamiento en el escenario CSIT tiende a estabilizarse a partir de un cierto valor de ASD o d_t (valor que será menor a medida que las condiciones mejoren bien aumentando la distancia entre antenas o el ángulo de dispersión respectivamente), no sucede lo mismo para el escenario CDIT. Para valores elevados de correlación, los valores arrojados en cada caso son muy similares y van separándose conforme evolucionan las gráficas. Cuanto mayor es el número de antenas y mayor es ASD o d_t , más se aleja la gráfica correspondiente a CDIT de la CSIT.

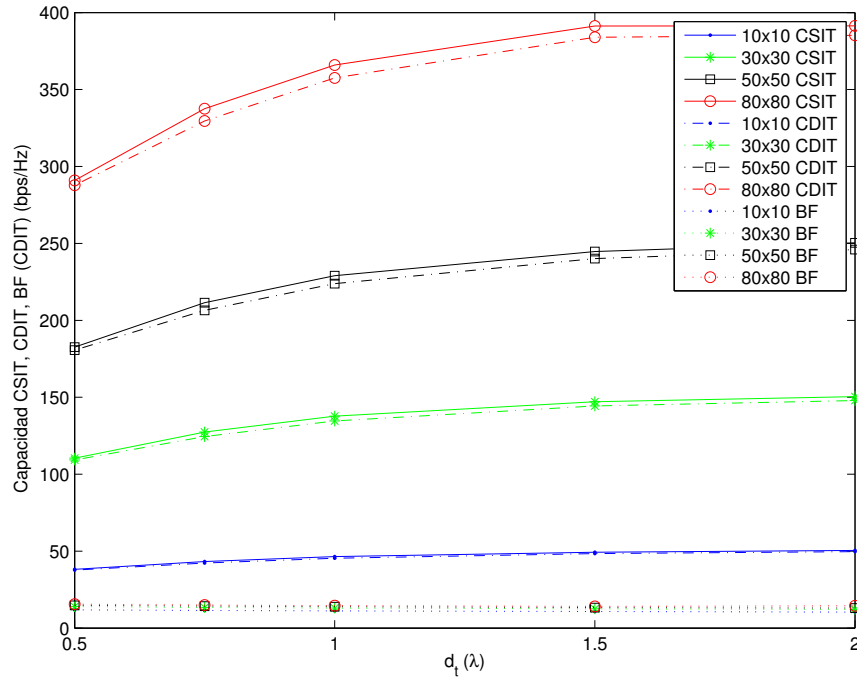
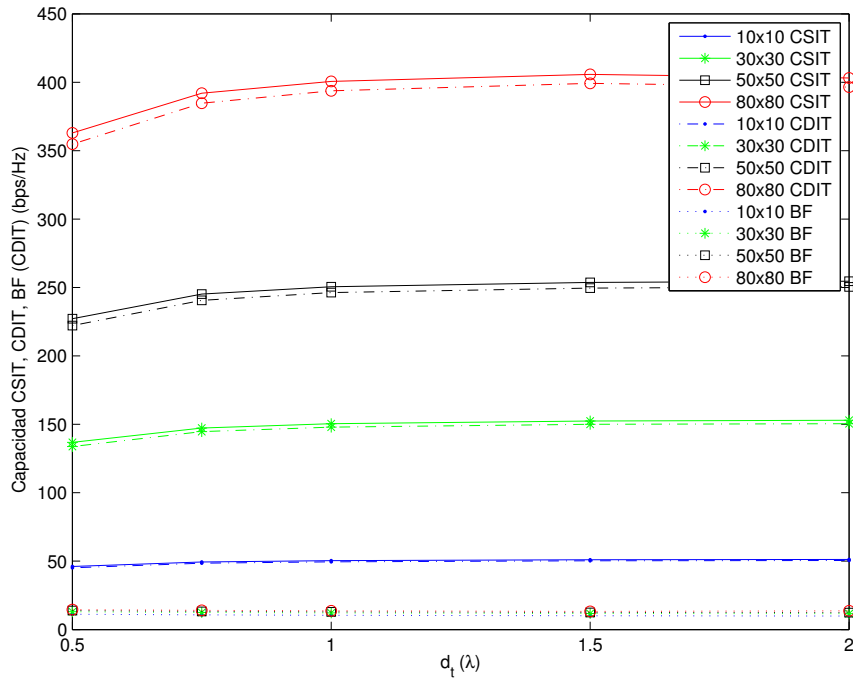
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $ASD = 20^\circ$

Figura 3.5: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras para $SNR = 19$ dB. Evolución con respecto a la distancia entre antenas transmisoras.

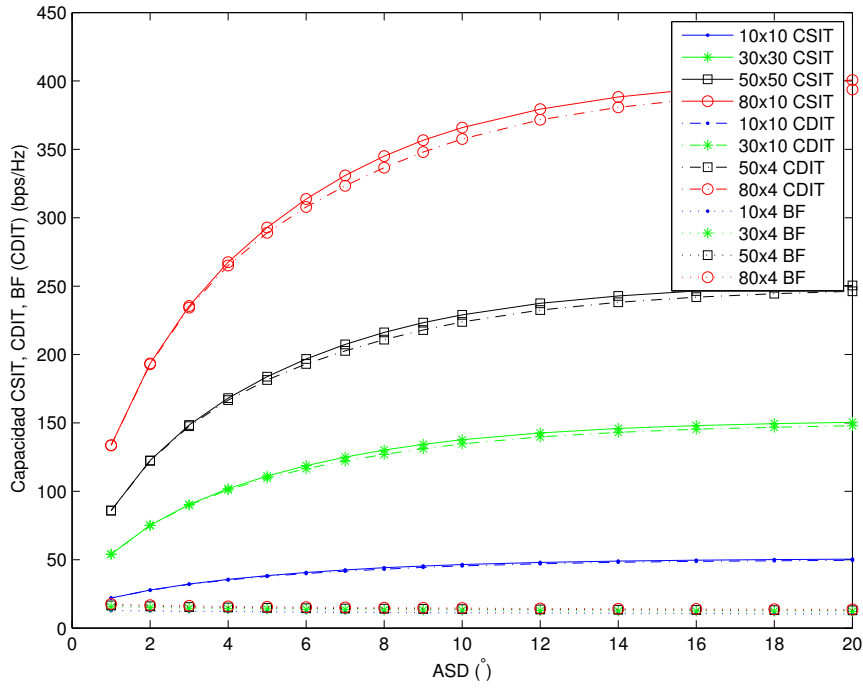
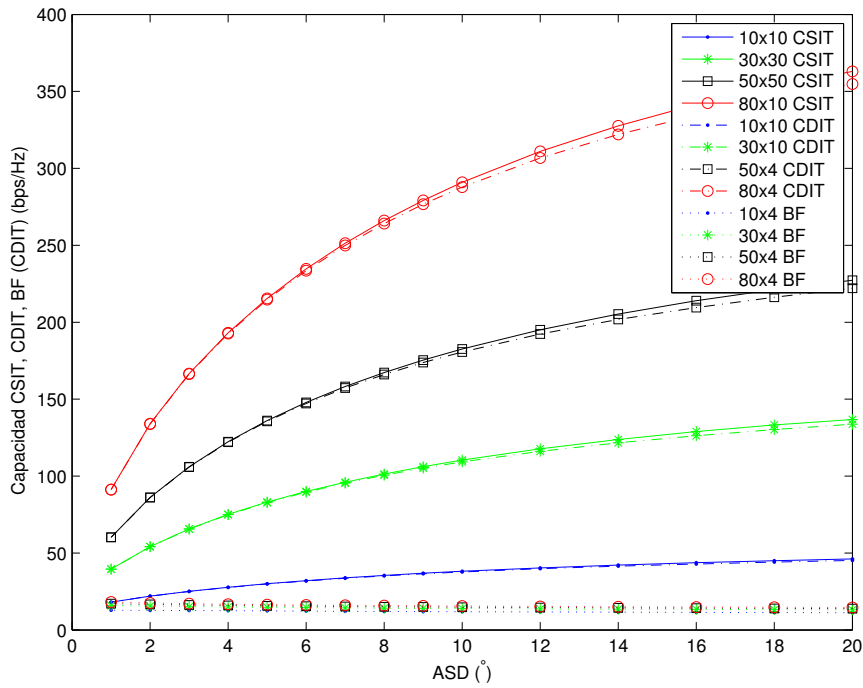
(a) $d_t = \frac{\lambda}{2}$ (b) $d_t = \lambda$

Figura 3.6: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras para $\text{SNR} = 19$ dB. Evolución con respecto al ángulo de dispersión en el transmisor.

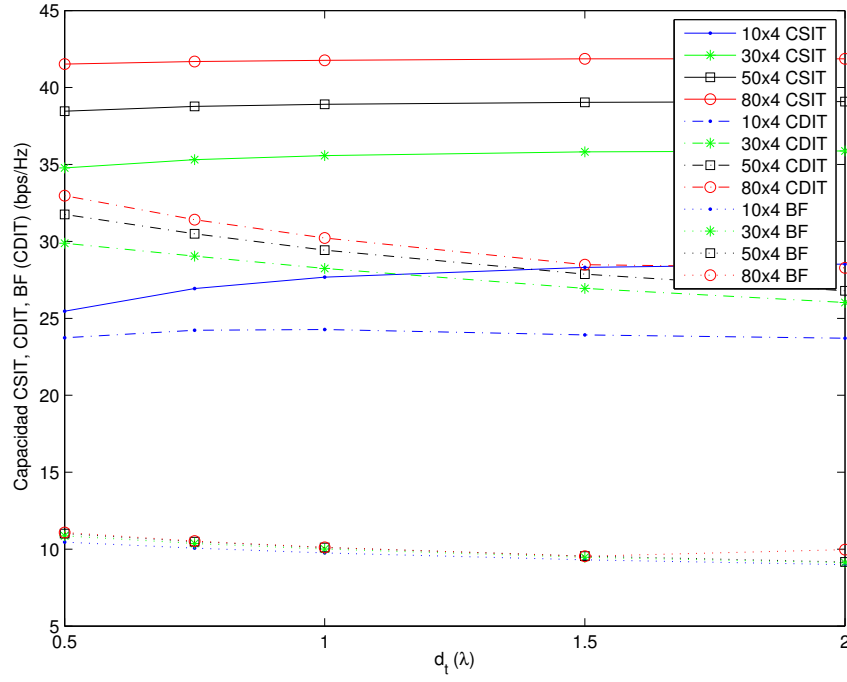
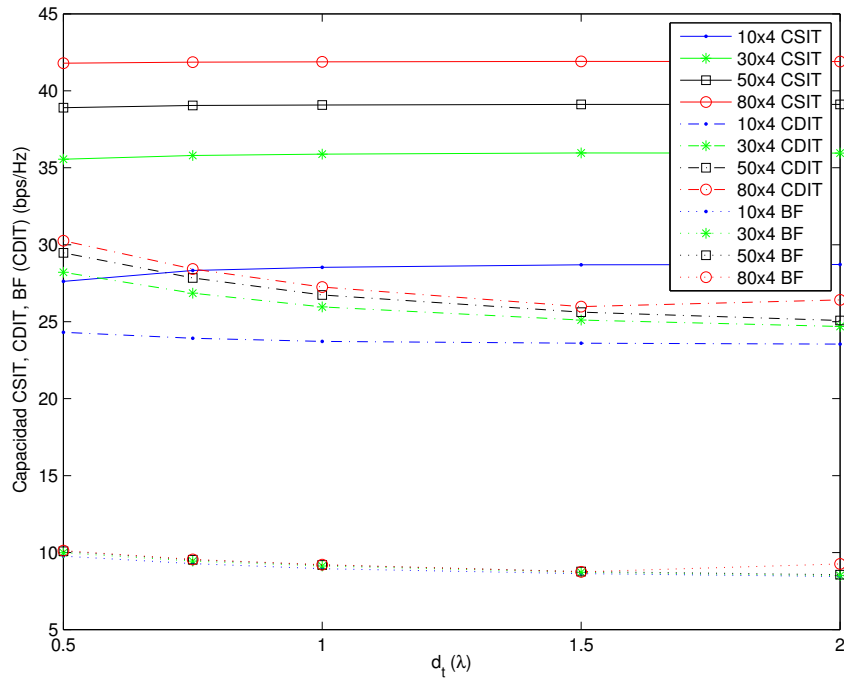
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $ASD = 20^\circ$

Figura 3.7: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras para $SNR = 19$ dB. Evolución con respecto a la distancia entre antenas transmisoras.

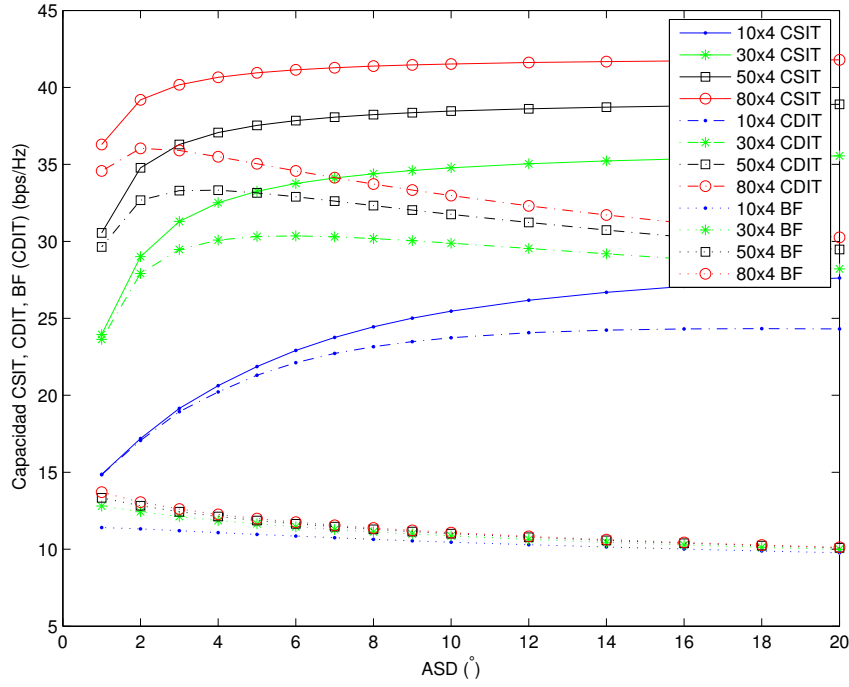
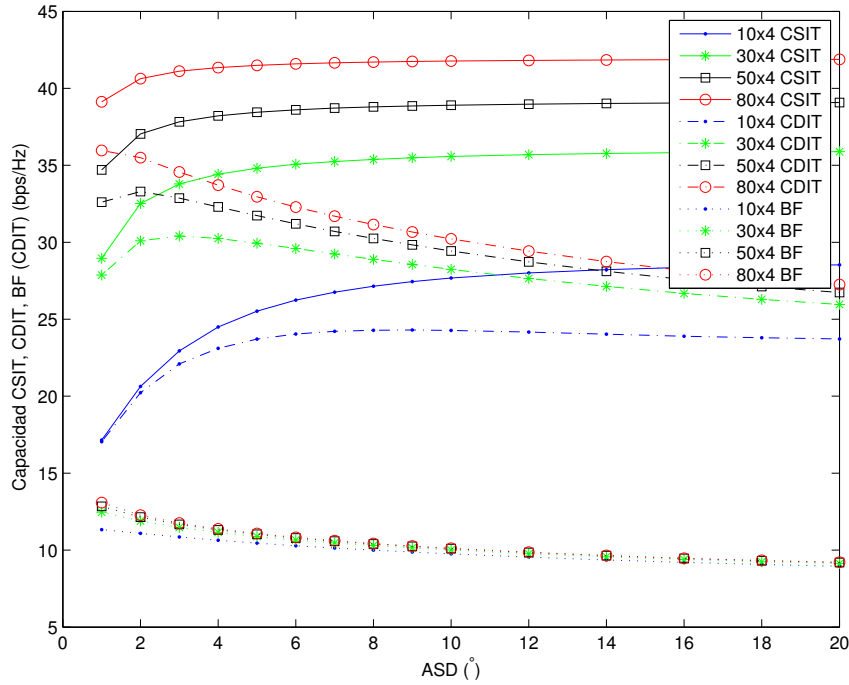
(a) $d_t = \frac{\lambda}{2}$ (b) $d_t = \lambda$

Figura 3.8: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras para $\text{SNR} = 19$ dB. Evolución con respecto al ángulo de dispersión en el transmisor.

3.6.4. Baja SNR

Este escenario es uno de los más relevantes en sistemas de comunicaciones debido principalmente a la necesidad de reutilizar frecuencias para un uso eficiente del ancho de banda, lo que resulta en sistemas con fuerte nivel de interferencias.

Para el caso de CDIT, una aproximación aceptada de la capacidad de un sistema MIMO es

$$C \left(\frac{E_b}{N_o} \right) = \frac{S_o}{3\text{dB}} \left(\left(\frac{E_b}{N_o} \right)_{\text{dB}} - \left(\frac{E_b}{N_o} \right)_{\text{min}} \right) + \epsilon \quad (3.29)$$

con

$$S_o = \frac{2 \text{Tr} \{ \mathbf{\Theta}_R \}^2}{\text{Tr} \{ \mathbf{\Theta}_R \}^2 + \text{Tr} \{ \mathbf{\Theta}_R^2 \}} \quad (3.30)$$

$$\frac{E_b}{N_{o \text{ min}}} = \frac{\log_e 2}{\text{Tr} \{ \mathbf{\Theta}_R \} \lambda_{\max}(\mathbf{\Theta}_T)} \quad (3.31)$$

siendo $\mathbf{\Theta}_T$ y $\mathbf{\Theta}_R$ la correlación en el transmisor y en el receptor respectivamente.

$$\mathbf{\Theta}_R = \frac{1}{M} E \{ \mathbf{H} \mathbf{H}^H \} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{\Theta}_T = \frac{1}{N} E \{ \mathbf{H}^H \mathbf{H} \} \quad (3.33)$$

Observando las ecuaciones (3.29), (3.30) y (3.31) podemos ver que para el análisis para baja SNR son $\lambda_{\max}(\mathbf{\Theta}_T)$ y $\text{Tr} \{ \mathbf{\Theta}_R \}$ son los parámetros que tienen influencia en la capacidad del sistema.

El efecto de la correlación en el transmisor como en el receptor es diferente desde el punto de vista de la capacidad. Cuando la correlación en el transmisor es elevada, $\frac{E_b}{N_{o \text{ min}}}$ disminuye, lo que hace que la eficiencia espectral aumente para un punto de trabajo concreto $\frac{E_b}{N_o}$.

De nuevo, hemos utilizado estas fórmulas para comprobar si los resultados que hemos ido obteniendo a lo largo de esta sección son correctos.

3.6.4.1. Sistema MIMO con el mismo número de antenas transmisoras y receptoras

Para un valor de SNR = -5 dB y un sistema MIMO con igual número de antenas transmisoras y receptoras podemos observar los resultados en las figuras (3.9) y (3.10).

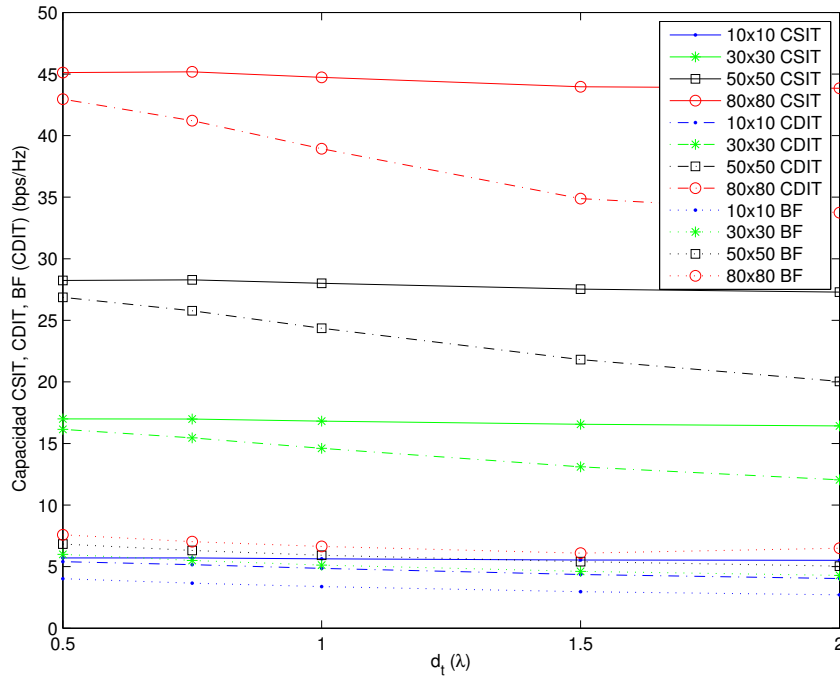
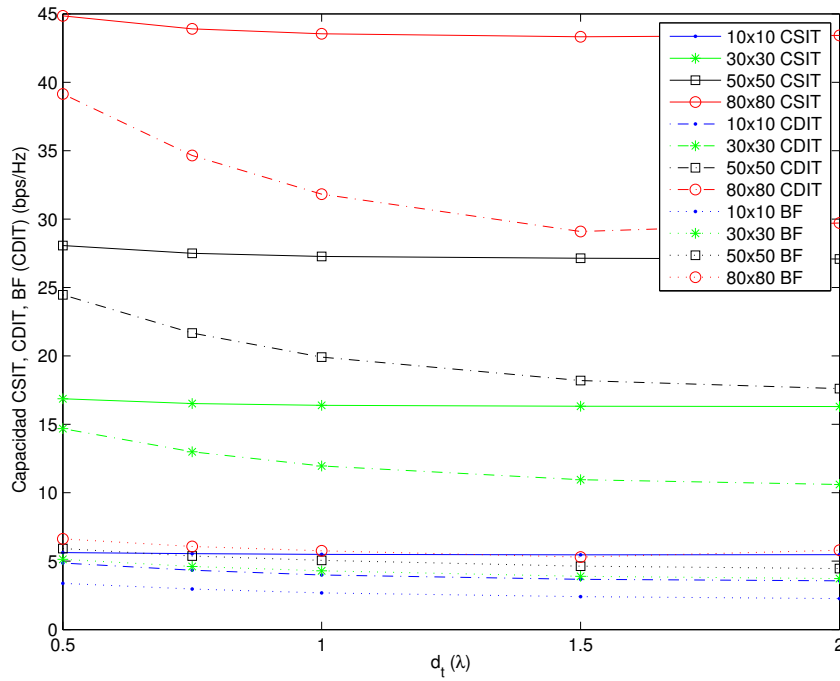
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $ASD = 20^\circ$

Figura 3.9: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras para $SNR = -5$ dB. Evolución con respecto a la distancia entre antenas transmisoras.

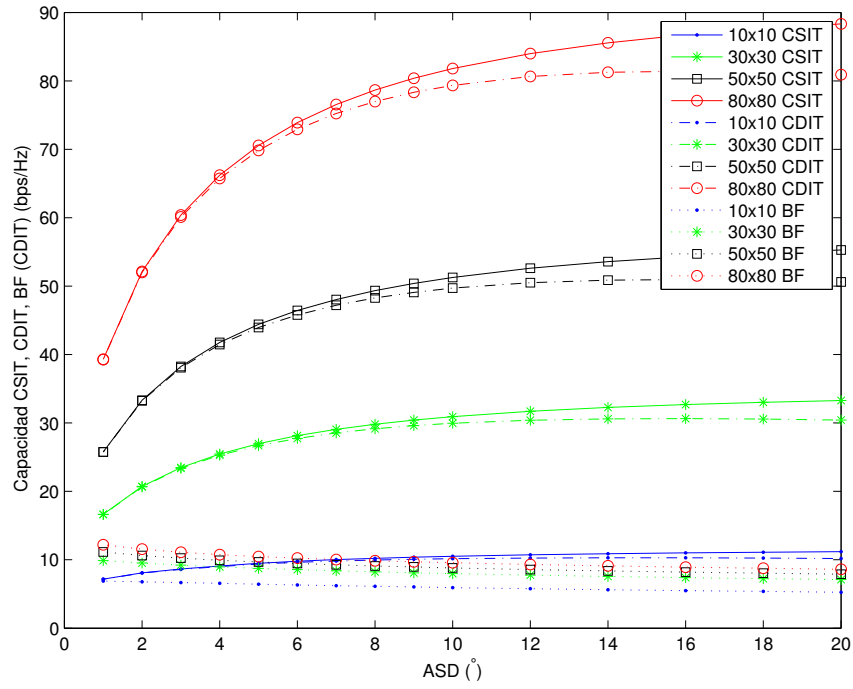
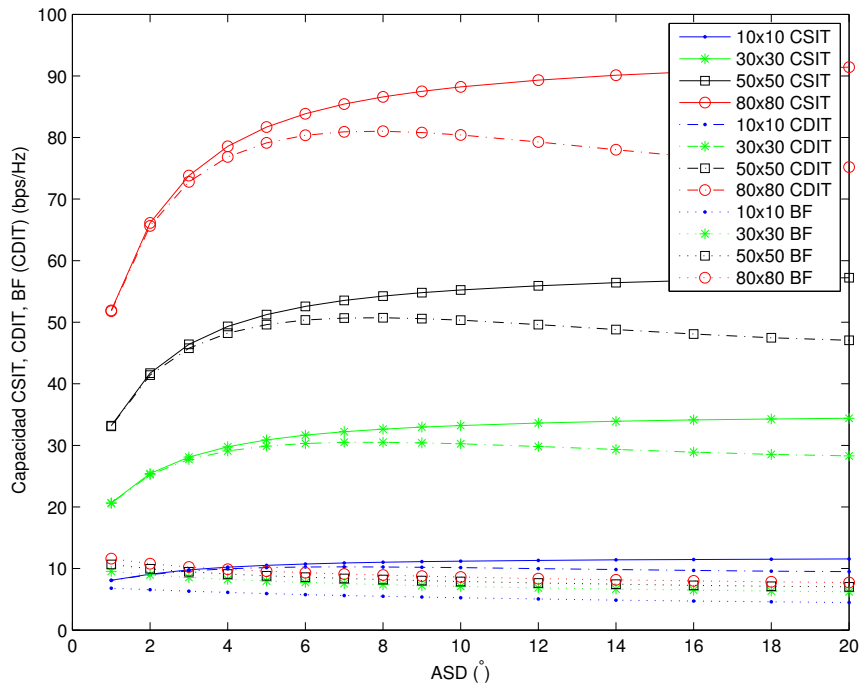
(a) $d_t = \frac{\lambda}{2}$ (b) $d_t = \lambda$

Figura 3.10: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con igual número de antenas transmisoras y receptoras para $\text{SNR} = -5$ dB. Evolución con respecto al ángulo de dispersión en el transmisor.

El comportamiento es similar al que comentábamos en la sección anterior. Mientras que el algoritmo de Water-Filling empleado en el caso CSIT hace que la capacidad se establezca a partir de cierto valor de d_t o ASD , los resultados de capacidad que arroja el caso CDIT se alejan cada vez más de los obtenidos para CSIT conforme aumentan tanto d_t como ASD . Sin embargo, hemos encontrado un comportamiento que no esperábamos en este caso, la existencia de un punto de trabajo para el que se alcanza la capacidad. Es decir, no nos acercamos más a la capacidad del sistema cuando la correlación es más o menos alta sino que existe un punto concreto (muy apreciable en la figura (3.10)) de ASD para el cual la capacidad es máxima.

3.6.4.2. Sistema MIMO masivo con M antenas transmisoras y 4 antenas receptoras

En este último caso, la evolución de las gráficas es la misma que la ya comentada. En las figuras (3.11) y (3.12) se ve cómo mientras el Water-Filling utilizado en el escenario CSIT tiende a estabilizarse a partir de cierto valor de d_t o de ASD (estabilización que sucederá antes cuando nos encontremos en condiciones con menor correlación), la capacidad correspondiente al escenario CDIT disminuye a medida que la correlación disminuye.

3.6.5. Comparación entre los diferentes algoritmos para el escenario CDIT

Como ya hemos comentado en la sección 3.5.2, para un escenario en el que existe CDIT, hemos implementado dos estrategias de transmisión diferentes. La primera de ellas trata de optimizar la matriz de covarianza en base a cálculos a partir del mínimo error cuadrático medio mientras que el segundo, mucho más sencillo, únicamente inyecta toda la potencia en una de las antenas transmisoras.

Como es de esperar, los resultados que obtendremos para el primero de ellos serán mejores que para el segundo. Se muestran estos resultados en las figuras (3.13) y (3.14) donde, para una distancia entre antenas fija o un ángulo de dispersión concreto, se puede comparar el comportamiento en términos de capacidad que ofrece el beamforming generalizado frente al algoritmo de distribución de potencia detallado anteriormente.

Así, tal y como anticipábamos, en las figuras se puede apreciar cómo el comportamiento de estas dos estrategias de transmisión para bajos niveles de SNR es prácticamente idéntico. A medida que la SNR va aumentando estos comportamientos se van alejando el uno del otro situándose el beamforming como el peor de los dos. Además, cuanto mayor es la SNR antes empieza a ser óptimo el algoritmo frente al beamforming.

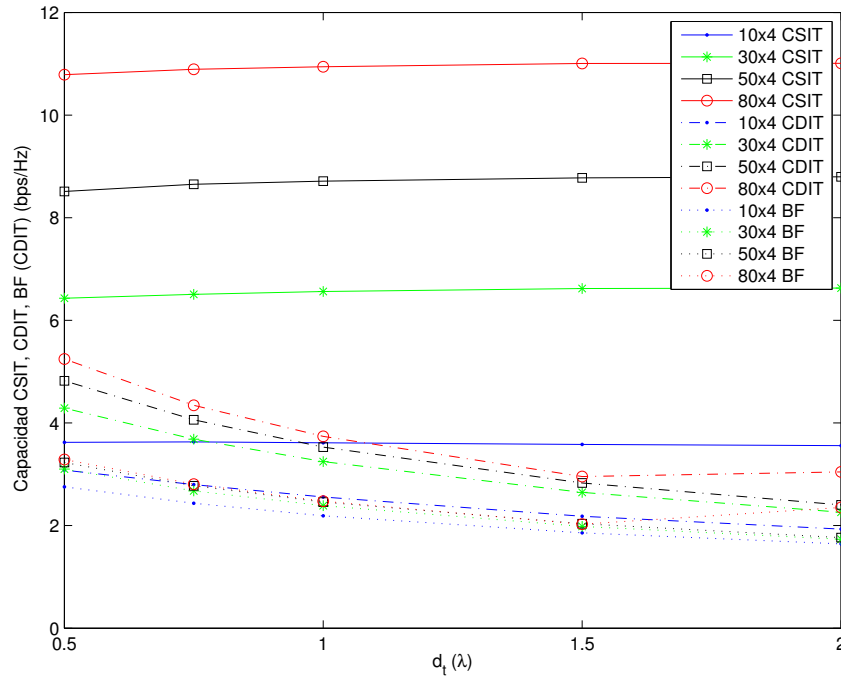
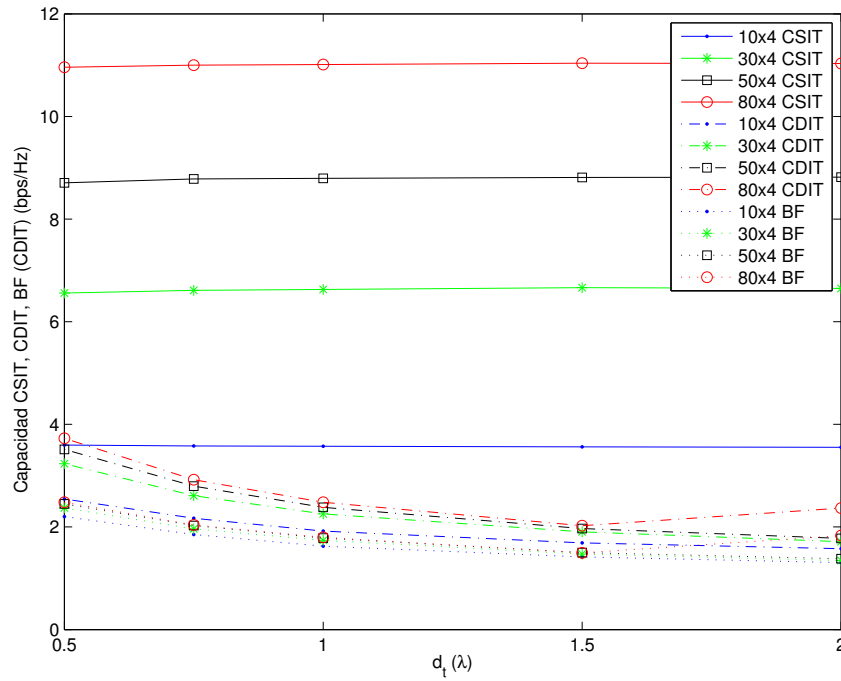
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $ASD = 20^\circ$

Figura 3.11: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras para $SNR = -5$ dB. Evolución con respecto a la distancia entre antenas transmisoras.

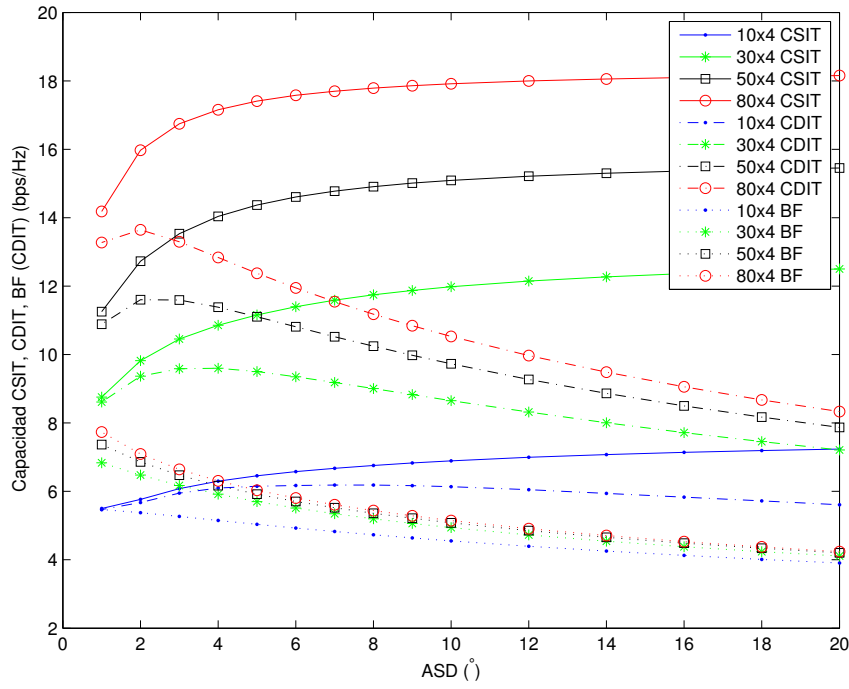
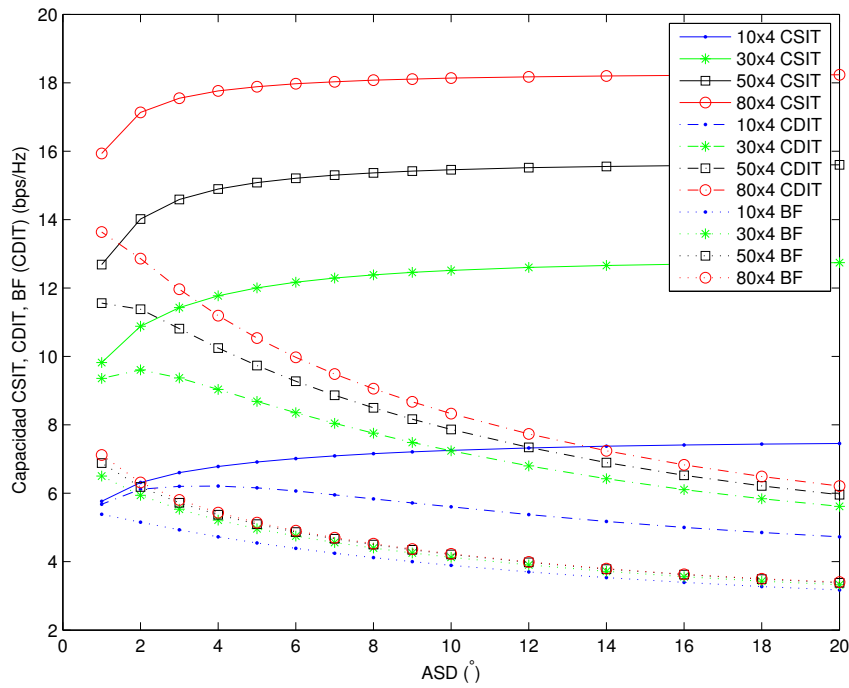
(a) $d_t = \frac{\lambda}{2}$ (b) $d_t = \lambda$

Figura 3.12: Comparación de la capacidad en escenarios CSIT o CDIT (y diferenciando las dos estrategias de transmisión para este último) de un sistema MIMO Masivo con M antenas transmisoras y 4 receptoras para $\text{SNR} = -5$ dB. Evolución con respecto al ángulo de dispersión en el transmisor.

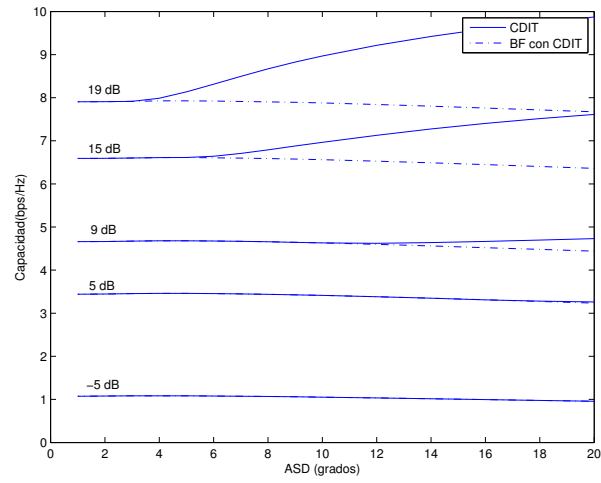
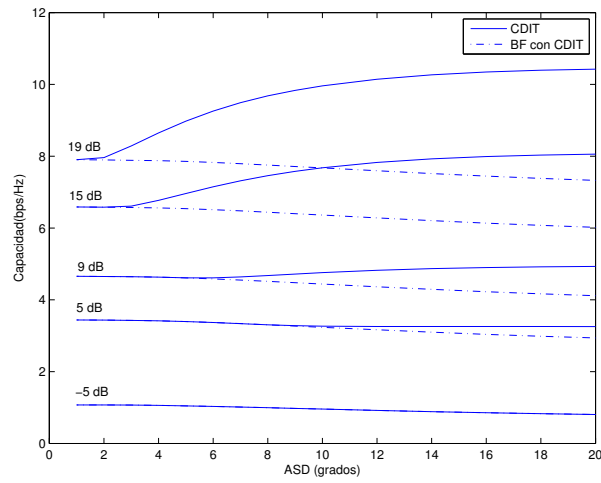
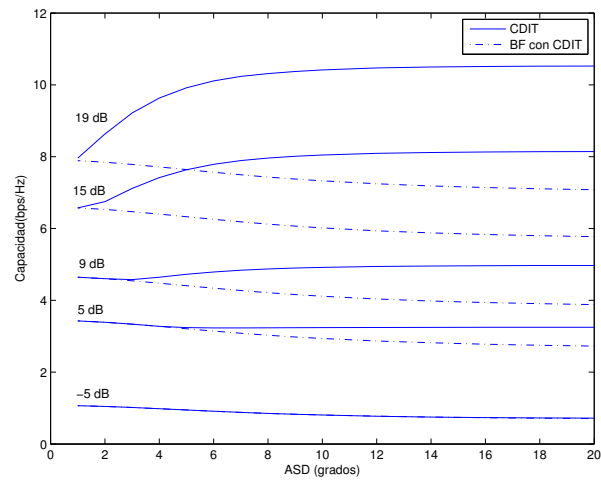
(a) $d_t = \frac{\lambda}{2}$ (b) $d_t = \lambda$ (c) $d_t = 2\lambda$

Figura 3.13: Comparación de las dos estrategias de transmisión planteadas para el escenario CDIT. Evaluación de las mismas con respecto a ASD y para diferentes valores de SNR

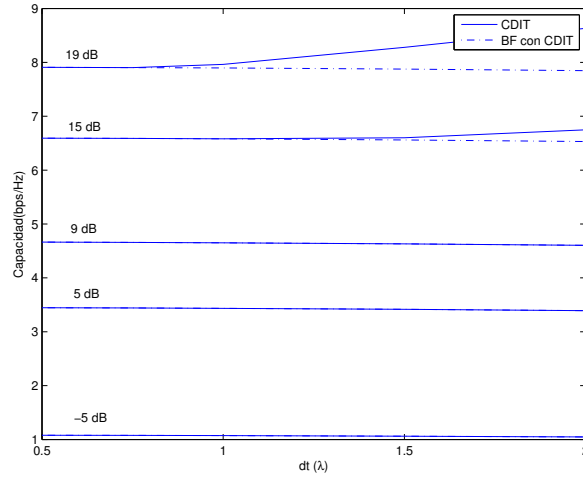
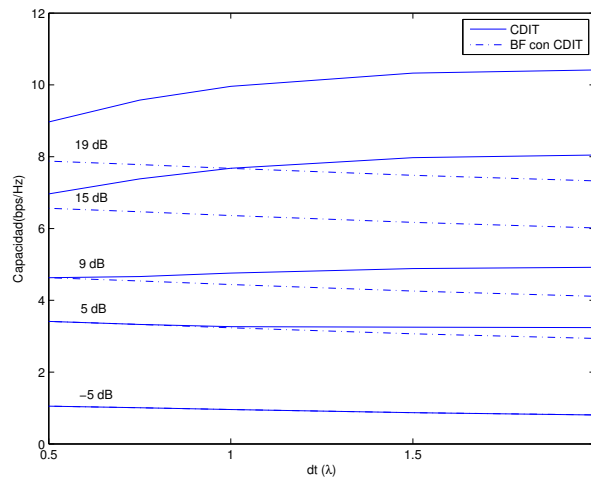
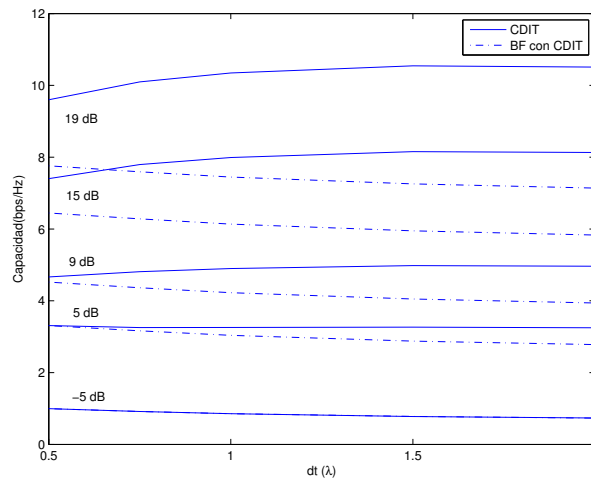
(a) $ASD = 2^\circ$ (b) $ASD = 10^\circ$ (c) $ASD = 16^\circ$

Figura 3.14: Comparación de las dos estrategias de transmisión planteadas para el escenario CDIT. Evaluación de las mismas con respecto a d_t y para diferentes valores de SNR

Cuando las condiciones en términos de correlación mejoran (es decir, aumenta la distancia entre antenas o la dispersión angular y por lo tanto disminuye la correlación) también es posible ver cómo el beamforming vuelve a ser peor que el algoritmo utilizado.

En resumen, las dos estrategias de transmisión arrojan resultados muy similares para entornos con bajos niveles de **SNR** mientras que a medida que las condiciones se hacen favorables (aumenta la **SNR**, el *ASD* o d_t) se hace notable la diferencia entre estas dos estrategias, posicionándose el beamforming como el peor de los dos.

Capítulo 4

Ortogonalidad

Los sistemas MIMO masivo nos permiten desplegar un elevado número de elementos en, al menos, uno de los dos extremos de la comunicación. Uno de los aspectos clave que hace posible esta tecnología es que la matriz de canal \mathbf{H} sea lo más ortogonal posible para simplificar así el procesamiento de señal. Dado que en este caso no estamos en escenarios con matrices de canal i.i.d. donde las matrices serían ortogonales, debemos encontrar una forma de medir esta ortogonalidad en los casos con los que estamos trabajando. En estos escenarios las premisas de las que partimos no son ideales sino que tienen múltiples limitaciones como un espacio limitado para el despliegue de las antenas o características del canal no deseadas.

Como ya hemos dicho nuestro interés reside en simplificar el procesamiento de señal, uno de los cuellos de botella de los sistemas MIMO masivo debido a la complejidad del algoritmo asociado. El aspecto clave que hace posible esta simplificación (que se traduce en una simplificación del precodificador y el ecualizador) es la ortogonalidad. Si las filas o las columnas de la matriz de canal \mathbf{H} son ortogonales, será posible hacer uso de una estrategia de filtro adaptado en el transmisor y receptor.

4.1. Medidas de ortogonalidad

Una matriz \mathbf{A} se dice que sus filas son ortogonales si

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{I} \quad (4.1)$$

o que sus columnas son ortogonales si

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (4.2)$$

que se traduce en

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^H \quad (4.3)$$

donde \mathbf{A}^H es la matriz transpuesta, e \mathbf{I} es la matriz identidad. Esta propiedad hace que trabajar con matrices ortogonales sea especialmente fácil, ya que hallar la matriz transpuesta de \mathbf{A} es mucho más sencillo que hallar su inversa.

Volviendo a nuestro escenario, en el que el canal queda definido por la matriz \mathbf{H} , lo que buscamos es que esta matriz sea lo más ortogonal posible, dado que esto simplificaría enormemente el procesamiento de señal. Sabiendo que el lugar más factible para desplegar muchas antenas es la BS (estación base), podemos diseñar un precodificador o un ecualizador muy simple para el caso del enlace descendente o ascendente, respectivamente. En ambos casos sería un filtro adaptado.

Nos centraremos en el caso del enlace descendente, por lo que matemáticamente la propiedad que buscamos en nuestra matriz de canal \mathbf{H} es

$$\frac{\mathbf{H}\mathbf{H}^H}{M} \approx \mathbf{I}_N \quad (4.4)$$

es decir, buscamos que las filas de \mathbf{H} sean ortogonales.

Cada elemento h_{nm} caracteriza el canal existente entre la antena m -ésima transmisora y la antena n -ésima receptora; cada fila entonces de la matriz \mathbf{H} caracterizará el canal entre las M antenas transmisoras y la antena n -ésima receptora. Nos interesa que cada fila $[h_{1m} \ h_{2m} \ \dots \ h_{NM}]$ sea ortogonal al resto de filas, es decir, independiente a las comunicaciones que viajan a otra antena receptora.

Para medir el nivel de ortogonalidad de la matriz \mathbf{H} , es necesario definir una medida para esta magnitud. Proponemos a continuación varias medidas con las que hemos trabajado, para después concluir con la que nos parece más adecuada y por qué. Para evaluar su comportamiento lo haremos observando los resultados de las medidas explicadas a continuación comparando en cada caso el comportamiento para las matrices de canal $M \times 2$, $M \times 4$, $M \times M$ e i.i.d.

4.1.1. Norma de Frobenius

En este primer caso, utilizamos el concepto de norma matricial (Anexo A) y en particular el caso concreto de normas componente a componente, definidas como:

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^p \right)^{1/p} \quad (4.5)$$

Para $p = 2$, a esto se le llama norma de Frobenius o norma de Hilbert-Schmidt. La norma de Frobenius es una norma matricial que se define como la raíz cuadrada de la suma de los valores absolutos de los elementos que

forman la matriz \mathbf{A} de dimensiones $M \times N$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |a_{ij}|^2} \quad (4.6)$$

La norma de Frobenius también equivale a la raíz cuadrada de la traza de la matriz $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$, donde \mathbf{A}^H es la matriz transpuesta conjugada,

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^H)} \quad (4.7)$$

Utilizaremos esta norma para calcular la distancia que existe entre la matriz $\frac{\mathbf{H}\mathbf{H}^H}{M}$ y la matriz identidad \mathbf{I}_N . Definimos así nuestra medida como

$$d\left(\frac{\mathbf{H}\mathbf{H}^H}{M}, \mathbf{I}_N\right) = \left\| \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}^H}{M} - \mathbf{I}_N \right\|_F \quad (4.8)$$

4.1.2. Defecto de ortogonalidad

El defecto de ortogonalidad es una medida de lo cerca que está una matriz de ser ortogonal, partiendo del concepto de bases de vectores ortogonales que forman un espacio. Compara el producto de la longitud de los vectores que forman la base con el volumen del paralelepípedo que definen. Para una base formada por vectores perfectamente ortogonales, estas dos cantidades deberían ser iguales.

Cualquier base de n vectores puede ser representada por la matriz \mathbf{A} , cuyas columnas son los vectores de la base $a_i, i = 1, \dots, n$. Cuando el número de vectores que forman la base es igual a la dimensión del espacio que ocupan, la matriz \mathbf{A} es cuadrada, y el volumen del paralelepípedo es simplemente el valor absoluto del determinante de la matriz, $\det(\mathbf{A})$. Si el número de vectores de la base es menor a la dimensión del espacio, el volumen queda definido por $\sqrt{\det(\mathbf{A}^H\mathbf{A})}$.

Se define entonces el defecto de ortogonalidad como

$$\delta(\mathbf{A}) = \frac{\prod_{i=1}^n \|a_i\|}{\sqrt{\det(\mathbf{A}^H\mathbf{A})}} \quad (4.9)$$

De la definición geométrica se deriva que $\delta(\mathbf{A}) \geq 1$ y únicamente en el caso de que la base sea ortogonal tendremos $\delta(\mathbf{A}) = 1$.

Nosotros aplicaremos esta medida a nuestra matriz de canal \mathbf{H} , buscando ortogonalidad en las filas por lo que la expresión final queda de la siguiente forma:

$$\delta(\mathbf{A}) = \frac{\prod_{i=1}^n \|h_i\|}{\sqrt{\det(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)}} \quad (4.10)$$

donde $\|h_i\|$ son las filas de \mathbf{H} .

4.1.3. Norma del producto de las filas

En tercer lugar, hemos hecho uso de la propiedad de que el producto escalar de dos vectores ortogonales es nulo. Si una matriz \mathbf{A} tiene las columnas ortogonales, el producto de una columna por cualquier otra será también cero.

Así, hemos definido la siguiente medida de ortogonalidad que calcula la suma de los valores absolutos del producto de una fila por el resto (recordemos que nosotros buscamos que las filas de \mathbf{H} sean ortogonales)

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N |a_i^H a_j| \quad (4.11)$$

De esta forma, cuanto más cerca de 0 esté Λ más cerca estaremos de la ortogonalidad

4.1.4. Elección de la medida de ortogonalidad más adecuada

Para escoger la medida que más se adapta a lo que buscamos, compararemos los resultados que nos ofrece cada una de ellas para diferentes casos i.i.d.. Para un número M concreto de antenas en el transmisor, obtendremos los resultados de ortogonalidad con 2, 4 o M antenas en el receptor.

En primer lugar, en la tabla (4.1) se puede observar el comportamiento de la **norma de Frobenius** (detallada en la sección 4.1.1) para el caso de $M = 50$ y diferentes antenas en el receptor.

Norma de Frobenius para $M = 50$	
$N = 2$	0.2625
$N = 4$	0.5530
$N = 50$	7.0633

Tabla 4.1: Valores de la norma de Frobenius para el caso de matrices i.i.d. con 50 antenas en el transmisor y 2, 4 y 50 antenas en el receptor

Intuitivamente, se podría creer que el nivel de ortogonalidad que deberíamos obtener para todas las matrices i.i.d debería ser el mismo pero como vemos en las gráficas no lo es. Para entender esta propiedad basta con observar que calcular la norma de Frobenius de matriz se reduce a calcular la suma de los valores absolutos de cada elemento de la matriz. Una matriz de mayor tamaño tendrá más elementos y por tanto su norma de Frobenius será necesariamente mayor. Es por esto que los valores correspondientes a los casos de 50x2 o 50x4 se encuentran próximos a cero pero el de 50x50 se encuentra por encima, alrededor de un valor de 7.

En cuanto al **defecto de ortogonalidad** explicado en la sección 4.1.2, en la tabla 4.2 encontramos los valores que arroja esta medida para los mismos casos evaluados con la norma de Frobenius. De nuevo para $N = 2$ y $N = 4$ obtenemos valores muy bajos pero, con $N = 50$, el resultado se dispara enormemente.

Defecto de ortogonalidad para $M = 50$	
$N = 2$	1.0386
$N = 4$	1.2740
$N = 50$	3.9085×10^{30}

Tabla 4.2: Valores del defecto de ortogonalidad para el caso de matrices i.i.d. con 50 antenas en el transmisor y 2, 4 y 50 antenas en el receptor

Por último, en cuanto a la tercera medida comentada en la sección 4.1.3, los valores obtenidos los podemos encontrar en la tabla 4.3. Pese a que el valor obtenido para $N = 2$ es muy bajo, el crecimiento que sufre esta medida con respecto a N es bastante rápido, y ya para $N = 4$ nuestra medida nos ofrece un resultado de 3.0936. En el caso de $N = 50$ el aumento de este valor es muy grande, alcanzando el valor de 955.8792. Dado que nuestra matriz \mathbf{H} (i.i.d. en este caso) ha sido generada de forma aleatoria, la probabilidad de que dos filas de \mathbf{H} sean independientes es mucho más alta que la probabilidad de que 50 filas lo sean, y de ahí que el resultado que nos da la medida de ortogonalidad para dimensiones elevadas sea mucho mayor y, por tanto, denote menor ortogonalidad

Producto de filas para $M = 50$	
$N = 2$	0.4999
$N = 4$	3.0936
$N = 50$	955.8792

Tabla 4.3: Valores del producto de filas para el caso de matrices i.i.d. con 50 antenas en el transmisor y 2, 4 y 50 antenas en el receptor

Una vez comparados los resultados de las tres medidas de ortogonalidad propuestas, estamos ya en condiciones de seleccionar aquella que más se adapta a lo que buscamos para realizar las simulaciones. Nuestro objetivo es encontrar aquella medida que nos dé resultados similares de ortogonalidad para los tres casos i.i.d. estudiados. En los tres escenarios observamos cómo los valores para los casos de dimensiones reducidas ($N = 2$ y $N = 4$) son suficientemente bajos, aumentando a medida que las dimensiones aumentan. De las tres medidas analizadas, aquella que sufre un crecimiento menor con respecto a la dimensión es la norma de Frobenius, por lo que la elegiremos como la más adecuada y haremos uso de ella en las simulaciones sucesivas.

Además, esta medida de ortogonalidad es consistente con la que se propone en [18]

4.2. Resultados de ortogonalidad de las simulaciones

4.2.1. Parámetros de las simulaciones

Los parámetros que emplearemos en estas simulaciones serán los mismos que describimos en la sección 3.6.1.

4.2.2. Ortogonalidad en el caso asimétrico $N = 2$

Se muestran en esta sección los resultados de ortogonalidad obtenidos para un escenario en el que $N = 2$. Para ello, asumimos un escenario incorrelado en el receptor que podría tratarse o bien en un sistema MIMO multiusuario en el que la BS sirve a 2 usuarios o bien en un sistema de un único usuario con 2 antenas en el receptor.

En la figura (4.1) podemos observar el efecto que produce la distancia entre antenas transmisoras d_t en la ortogonalidad de \mathbf{H} . En ellas se puede ver cómo a mayor distancia entre antenas mejor es el nivel de ortogonalidad obtenido, lo que deriva inevitablemente en la necesidad de mayor espacio físico para el despliegue de las antenas.

Además, podemos observar un efecto de saturación en las gráficas en relación al valor de M . Llega un punto en el que la mejora que provoca un aumento del número de antenas en transmisión (M) es mínima. A valores bajos de M , aumentar el número de antenas transmisoras mejora significativamente la ortogonalidad de la matriz. Para valores elevados, a partir de entre 50 y 60 antenas transmisoras, esta mejora no es significativa y probablemente habría que analizar el coste físico del despliegue del sistema para estudiar si merecería la pena incluir tantas antenas. Este efecto se hace más pronunciado cuanto mayor es el valor de ASD, es decir, cuando nos encontramos en condiciones más favorables antes aparece el efecto de saturación. A medida que disminuye ASD, las matrices realistas tienden de forma más lenta a una mayor ortogonalidad y existe mayor distancia entre la medida calculada a diferentes valores de d_t (por ejemplo, la diferencia que existe en la ortogonalidad para la matriz correspondiente a $d_t = 0,75\lambda$ y a $d_t = \lambda$ es mayor para $ASD = 5^\circ$ que para $ASD = 20^\circ$).

De la figura (4.2) que muestra el comportamiento de la ortogonalidad de \mathbf{H} con respecto a diferentes valores de ASD, podemos extraer conclusiones

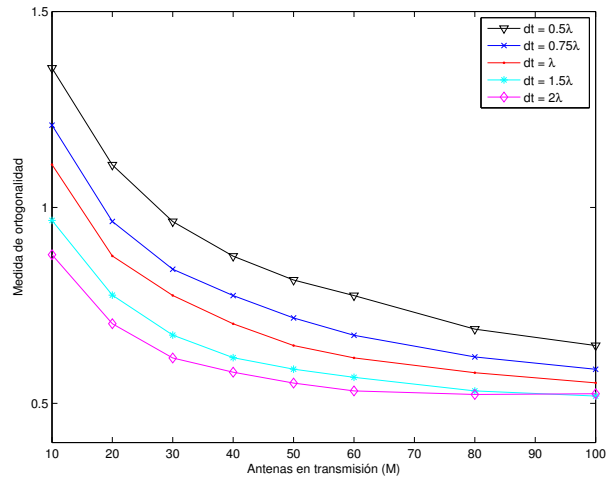
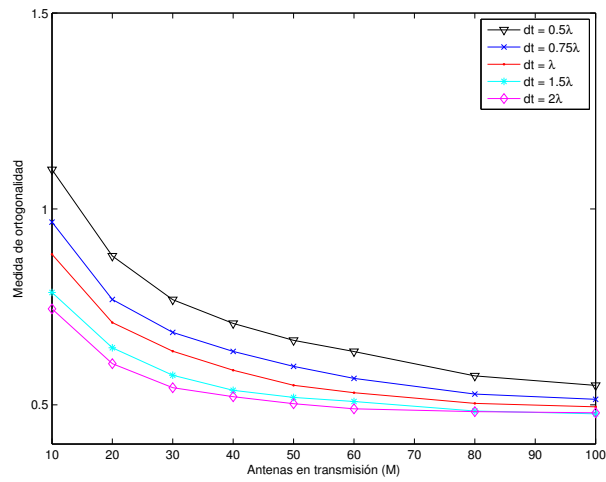
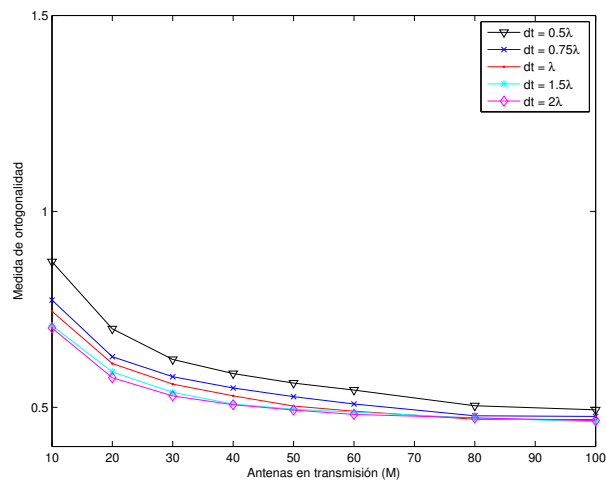
(a) $ASD = 5^\circ$ (b) $ASD = 10^\circ$ (c) $ASD = 20^\circ$

Figura 4.1: Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO masivo con M antenas transmisoras y 2 antenas receptoras para diferentes valores de d_t .

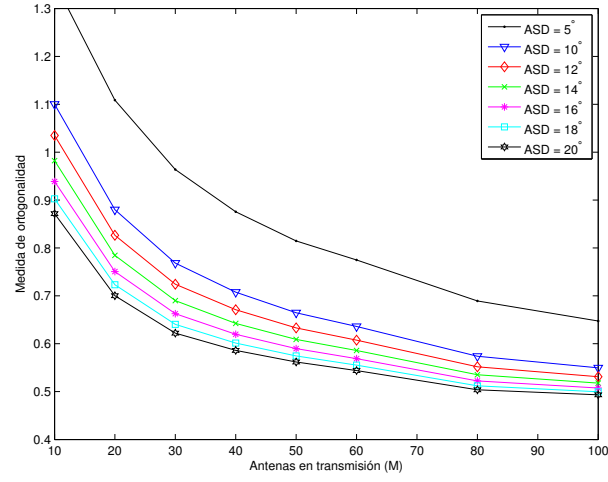
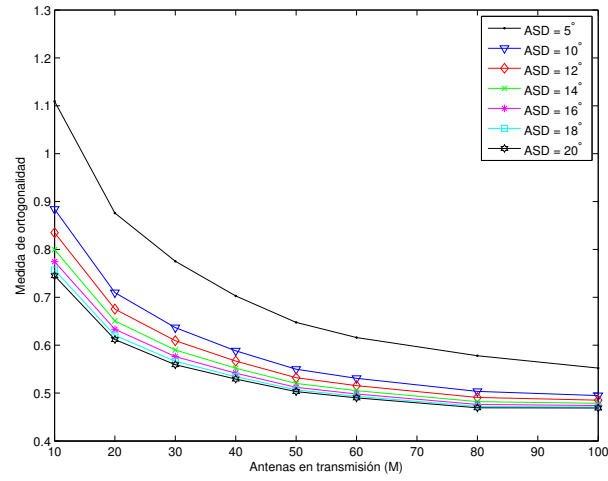
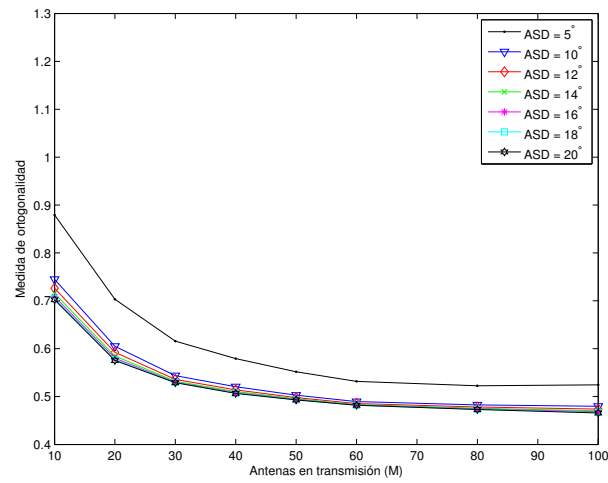
(a) $d_t = 0,5\lambda$ (b) $d_t = \lambda$ (c) $d_t = 2\lambda$

Figura 4.2: Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO masivo con M antenas transmisoras y 2 antenas receptoras para diferentes valores de ASD .

similares. Al igual que antes preferíamos casos en los que la distancia entre antenas transmisoras fuera lo mayor posible, también ahora nos interesa un valor de ASD lo mayor posible. Cuanto más pequeña sea la dispersión angular, la distancia obtenida entre \mathbf{H} y la matriz identidad será mayor y por tanto, nuestra \mathbf{H} será menos ortogonal.

De nuevo aparece el efecto de saturación ya comentado anteriormente. Para valores pequeños de M , añadir más antenas en el transmisor mejora significativamente la ortogonalidad. No sucede esto mismo a partir de valores elevados de M (alrededor de 50 o 60), cuando se produce este efecto de saturación y no mejora demasiado la ortogonalidad. Dicho efecto sucede antes para valores altos de d_t .

4.2.3. Ortogonalidad en el caso asimétrico $N = 4$

Continuando en un escenario MIMO masivo con M antenas en transmisión y $N = 4$ antenas en recepción, las simulaciones en este caso nos arrojan comportamientos de la matriz \mathbf{H} prácticamente idénticos a los obtenidos para $N = 2$. Para ilustrarlo, sólo incluiremos la gráfica (4.3) que muestra los resultados para $ASD = 10^\circ$ y $d_t = \lambda$.

En estas gráficas podemos ver cómo la evolución que sufre la ortogonalidad de la matriz \mathbf{H} es tal y como ya hemos descrito en la sección 4.2.2 para el caso de 2 antenas en el receptor. La ortogonalidad aumenta a medida que el ángulo de dispersión en el transmisor y la distancia entre antenas transmisoras disminuyen. Como es de esperar, también observamos el efecto de saturación que se produce cuando nos encontramos con un número de antenas elevado.

4.2.4. Ortogonalidad en el caso simétrico $N = M$

Para el caso de sistemas MIMO simétricos, con igual número de antenas receptoras que transmisoras ($M = N$), los resultados obtenidos son los que aparecen en la figura (4.4).

Podemos ver como los resultados en este caso son completamente diferentes que los obtenidos para los casos asimétricos donde $N = 2$ y $N = 4$. Recordemos que estamos estudiando escenarios con sistemas MIMO masivo, donde el número de antenas en un extremo de la comunicación es significativamente mayor que el número de antenas en el otro extremo, $M \gg N$. En este caso, en el que $N = M$, no podemos aplicar las medidas que estamos estudiando pues no cumple el primer requisito que ha de tener un sistema MIMO masivo. Por ello, la conclusión que podemos extraer de este análisis es que no podremos lograr la ortogonalidad en matrices con dimensiones tan

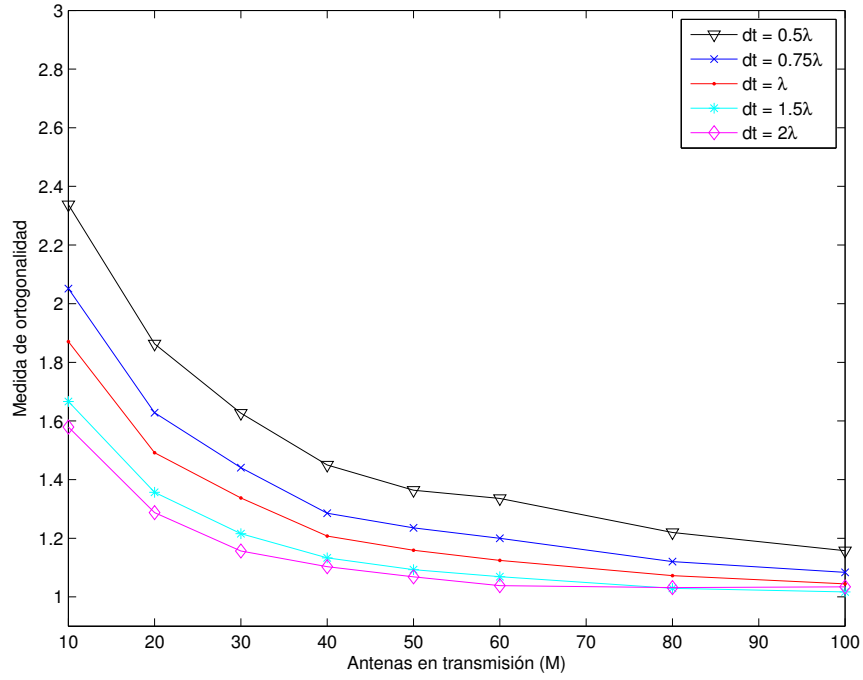
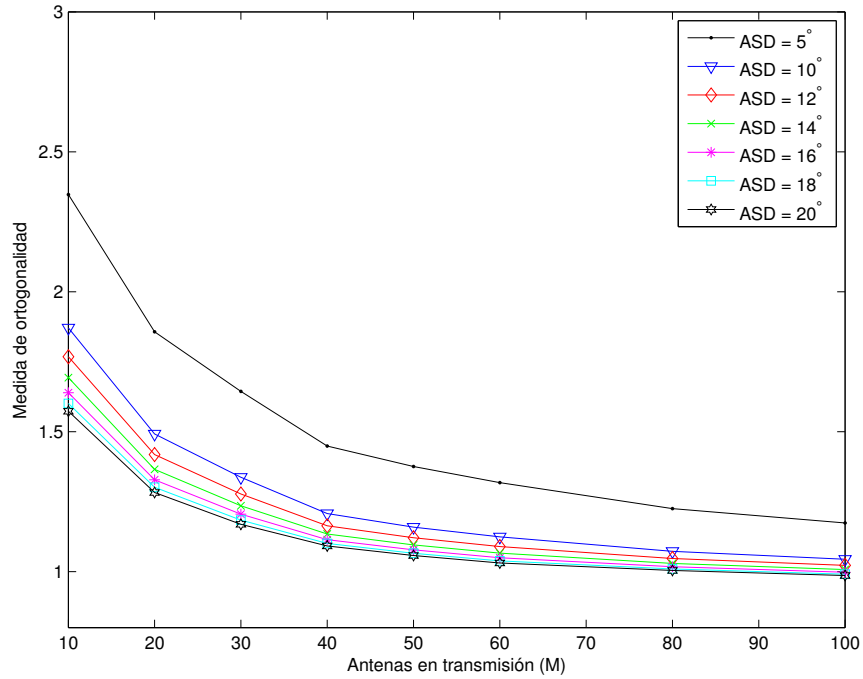
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $d_t = \lambda$

Figura 4.3: Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO masivo con M antenas transmisoras y 4 antenas receptoras para diferentes valores de ASD y d_t .

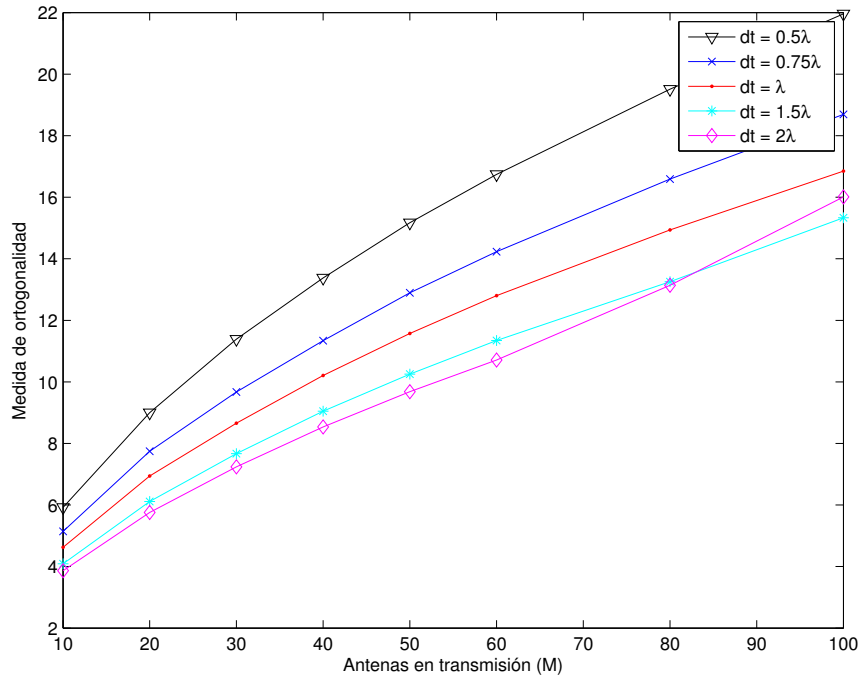
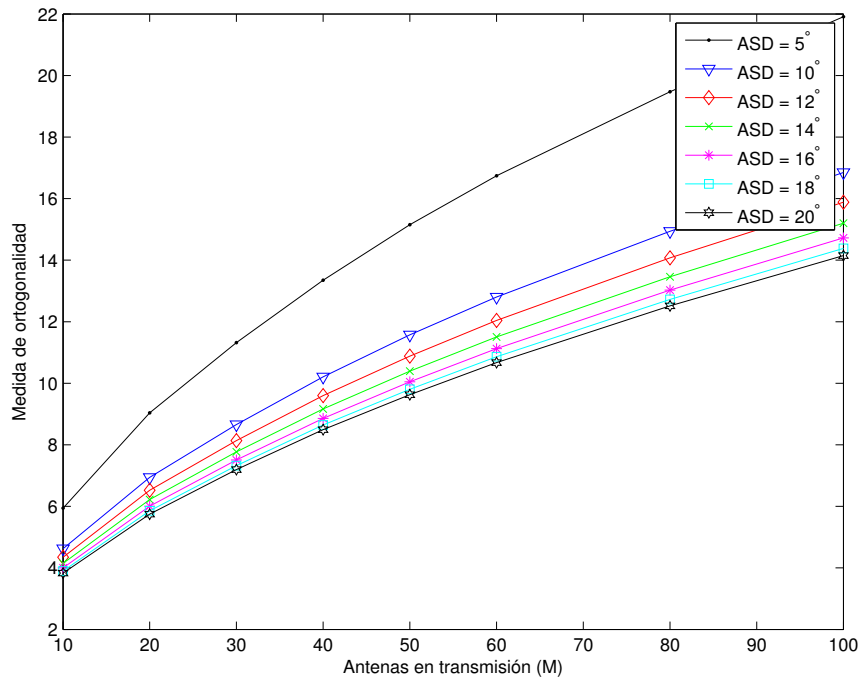
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $d_t = \lambda$

Figura 4.4: Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO con igual número de antenas transmisoras y receptoras para diferentes valores de ASD y d_t .

elevadas.

4.2.5. Comparación de ortogonalidad entre matrices realistas y matrices i.i.d.

En esta última sección compararemos la ortogonalidad entre las matrices que hemos generado de forma realista y las matrices i.i.d., con $M = 50$ antenas en el transmisor y diferente número N de antenas en el receptor.

Los parámetros de estas simulaciones han sido escogidos eligiendo un caso estándar en el transmisor: una distancia entre antenas de $d_t = \lambda$ y un ángulo de dispersión de las antenas transmisoras de $ASD = 10^\circ$. Como vemos en la figura (4.5), en todo momento la ortogonalidad de las matrices reales tienden a acercarse a las i.i.d a medida que la distancia entre antenas o el ángulo de dispersión aumenta, comportamiento que esperábamos pues es cuando se da la menor interferencia entre antenas. Además, la norma de las matrices realistas está siempre por encima de las ideales y tiende a acercarse al valor ideal a medida que mejoramos las condiciones (aumentamos la d_t o ASD , como ya vimos en las secciones anteriores).

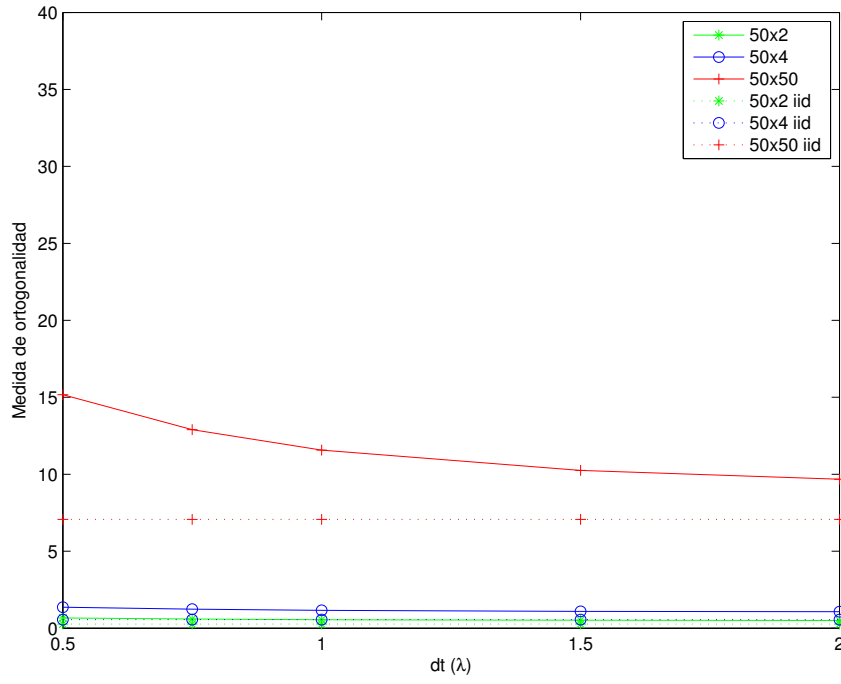
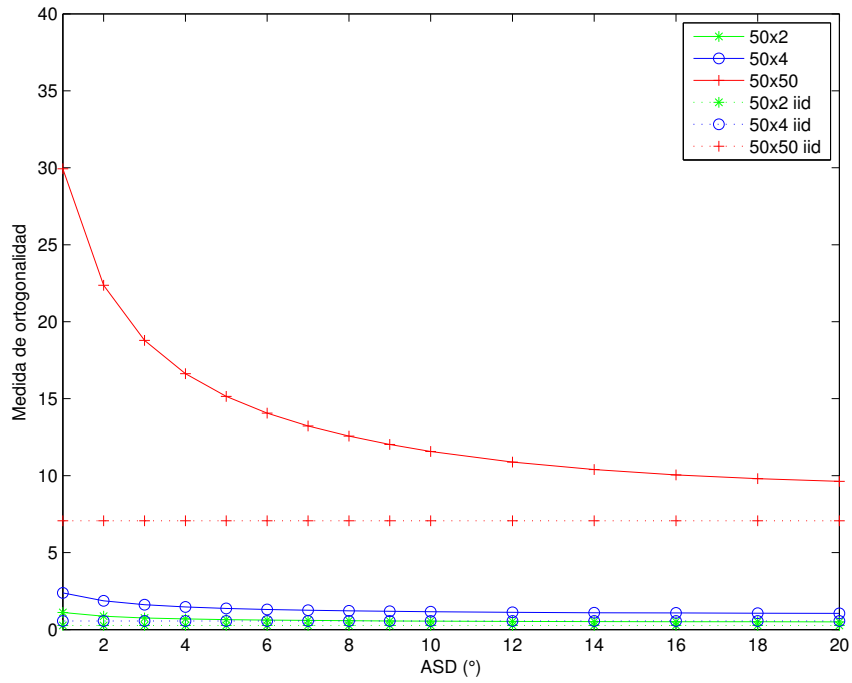
(a) $ASD = 10^\circ$ (b) $d_t = \lambda$

Figura 4.5: Medida de ortogonalidad para un sistema MIMO con 50 antenas transmisoras y diferente número de antenas receptoras para diferentes valores de ASD y d_t .

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras de trabajo

5.1. Conclusiones

El primer objetivo de este proyecto ha sido el análisis de la **capacidad** en sistemas MIMO masivos en función de diversos parámetros como la relación señal a ruido, la distancia entre antenas transmisoras o el ángulo de dispersión en el transmisor (parámetros que en definitiva representan la correlación existente en el transmisor). En este análisis de la capacidad se ha hecho hincapié en dos escenarios asintóticos: cuando la **SNR** es alta y cuando es baja.

Hemos visto que uno de los factores a tener en cuenta es el conocimiento del canal que tenemos en el transmisor (pues se asume CSIR a lo largo de todo este documento) y que, en función del mismo, se diferenciará entre distintas estrategias de transmisión para alcanzar la capacidad del sistema.

Habiendo observado los resultados obtenidos podemos concluir que la correlación en el transmisor afecta de forma diferente en función de los niveles de **SNR** con los que estamos trabajando. Dicha correlación aumenta cuando disminuimos la distancia entre los elementos radiantes o cuando disminuimos la dispersión angular en el transmisor.

La diferencia entre los escenarios CSIT y CDIT analizados es muy baja cuando estamos a alta **SNR**, pues las condiciones son muy favorables. Sin embargo, para baja **SNR** sí que es más notable dicha diferencia. Mientras que el algoritmo Water-Filling empleado en CSIT tiende a arrojar unos valores de capacidad que se estabilizan conforme la correlación disminuye, el algoritmo implementado para CDIT tiene un comportamiento más complejo. En general, para bajos niveles de **SNR** la correlación favorece a la capacidad. Por lo tanto, para un escenario concreto (por ejemplo, fijado el nivel de *ASD*

y la estructura del receptor), si queremos aumentar la capacidad podemos hacerlo bien reduciendo la separación entre las antenas transmisoras o bien añadiendo más elementos. Cabe destacar que para este escenario, hemos detectado un comportamiento que no esperábamos para un escenario concreto en el que la capacidad alcanza su máximo para un punto concreto de d_t o ASD , es decir, existen situaciones en las que no se da el comportamiento estrictamente creciente o decreciente que pronosticábamos [19] .

El segundo objetivo de este proyecto es el análisis de la ortogonalidad de las matrices de canal. Este aspecto también es clave, pues de la ortogonalidad condiciona el procesado señal y su complejidad. Así, lo que nosotros buscamos son matrices \mathbf{H} lo más ortogonales posibles. Este análisis se ha hecho igual que el de capacidad, es decir, variando parámetros presentes en el transmisor (ASD o d_t). El efecto relativo a la ortogonalidad observado es simple: a medida que los elementos se encuentran más separados o menor es la dispersión angular, la ortogonalidad de la matriz estudiada crece.

Estos resultados observados coinciden con los que podemos ver en [20], donde se estudia la correlación de un canal realista en un sistema MIMO masivo y cómo esta decrece a medida que el número de antenas aumenta, siendo mayor la del canal real que la del canal i.i.d. gaussiano en todo momento. Además, esta correlación decrece de forma más rápida cuando el número de antenas es bajo y tiene una evolución más lenta conforme vamos aumentando el número de antenas transmisoras, saturándose a partir de valores de alrededor de $M = 20$.

Con estos resultados sobre ortogonalidad y capacidad en nuestros manos, y conociendo las condiciones en las que va a trabajar el sistema MIMO (masivo o no) seremos capaces de discernir qué separación entre elementos radiantes o qué dispersión angular es la más adecuada de cara a alcanzar un compromiso entre la capacidad del sistema (que queremos que sea lo más elevada posible) y la complejidad del procesado de señal (que queremos que sea lo menor posible).

5.2. Líneas futuras de trabajo

Tras los análisis realizados, como posibles vías a seguir en la continuación de dicho proyecto se propone en primer lugar intentar conseguir que la medida propuesta en la sección 4.1.2, el defecto de ortogonalidad, arroje los resultados que esperamos y no se dispare cuando las dimensiones son tan elevadas. A raíz de esto, se propone también continuar con el diseño del precodificador del sistema MIMO.

Ahora mismo, el modelo de canal realista que estamos utilizando está implementado para dos dimensiones. Se podría tratar de extender a las tres

dimensiones y además incluir en este modelo parámetros que no se han tenido en cuenta aún como diagramas de radiación de los elementos presentes en el sistema o acoplos mutuos.

ANEXOS

Anexos A

Descomposición de matrices

Se denomina *autovalor* de la matriz cuadrada \mathbf{A} al valor escalar λ para el cual existe un vector \mathbf{x} distinto de $\mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Al vector \mathbf{x} se le llama *autovector* de \mathbf{A} correspondiente a λ . Los autovalores de la matriz \mathbf{A} son aquellos que valores de λ que satisfacen la *ecuación característica* de \mathbf{A} , que se define como $\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = 0$. El polinomio en λ definido por $\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = 0$ se llama *polinomio característico* de \mathbf{A} , por lo que los autovalores de \mathbf{A} son las raíces del polinomio característico. El polinomio característico de una matriz $N \times N$ tiene N raíces únicas $r_1, \dots, r_N (r_i \neq r_j)$ si es de la forma $\det[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}] = (-1)^N (\lambda - r_1) \dots (\lambda - r_N)$. Cuando el polinomio característico incluye un término $(\lambda - r_i)^k, k > 1$, decimos que la raíz r_i tiene multiplicidad k . Una matriz $N \times N$ tiene N autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, aunque no todos ellos tienen por qué ser únicos si alguna de las raíces tiene multiplicidad mayor que 1. Además, el determinante de una matriz es el producto de todos los autovalores de la matriz ¹,

teniendo en cuenta que un autovalor r_i con multiplicidad k contribuirá r_i^k al producto.

Los autovalores de una matriz hermitica son siempre reales, aunque los autovectores pueden ser complejos. Además, si \mathbf{A} es una matriz $N \times N$ se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \quad (\text{A.3})$$

¹Esta propiedad es fácilmente demostrable de la siguiente forma: Suponiendo que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de la matriz \mathbf{A} . Así, como ya hemos dicho, los autovalores son también las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) \quad (\text{A.1})$$

Así, dando a λ el valor 0, simplemente porque es una variable,

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \quad (\text{A.2})$$

es decir, el determinante de la matriz es igual al producto de sus autovalores

donde \mathbf{U} es una matriz unitaria cuyas columnas son los autovectores de \mathbf{A} y $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0]$. Como ya hemos comentado, cuando \mathbf{A} es hermítica, $\mathbf{\Lambda}$ tiene sólo elementos reales. Decimos que la matriz \mathbf{A} es *definida positiva* si, para todos los vectores $\mathbf{x} \neq 0$, tenemos que $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$. Una matriz hermítica es definida positiva si y sólo si todos sus autovalores son positivos. De forma similar, la matriz \mathbf{A} es semidefinida positiva o definida no negativa si, para todos los vectores $\mathbf{x} \neq 0$, $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$. Una matriz hermítica es definida no negativa si y sólo si todos sus autovalores son no negativos.

Suponiendo que la matriz \mathbf{A} es una matriz de dimensiones $N \times M$ y tiene rango R_A . Entonces existe una matriz $\mathbf{\Sigma}$ de dimensiones $N \times M$, y dos matrices unitarias \mathbf{U} y \mathbf{V} cuadradas de tamaño $N \times N$ y $M \times M$ respectivamente tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H \quad (\text{A.4})$$

Llamamos a las columnas de \mathbf{V} los vectores singulares de \mathbf{A} por la derecha y las columnas de \mathbf{U} los vectores singulares de \mathbf{A} por la izquierda. En cuanto a la matriz $\mathbf{\Sigma}$, es una matriz en cuya diagonal se encuentran los valores singulares de \mathbf{A} y todos los elementos fuera de la diagonal son cero

$$\mathbf{\Sigma}_{N \times M} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_N \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

para $N = M$. Para los casos en los que la matriz no es cuadrada:

$$\mathbf{\Sigma}_{N \times M} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_N \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

para $N > M$, y

$$\mathbf{\Sigma}_{N \times M} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_N & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

para $N < M$, donde $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ siendo σ_i el valor singular i -ésimo de la matriz $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$ y λ_i el autovalor i -ésimo. A la descomposición descrita en (A.4) se le llama descomposición en valores singulares de \mathbf{A} .

Bibliografía

- [1] G. J. Foschini and M. J. Gans. On limits of Wireless Communications in a Fading Environment when using Multiple Antennas. *Wireless Personal Communications*, 6(3):311–335, March 1998.
- [2] Q. Li, G. Li, W. Lee, M. il Lee, D. Mazzarese, B. Clerckx, and Z. Li. MIMO techniques in WiMAX and LTE: a feature overview. *IEEE Communications Magazine*, 48, 2010.
- [3] D. Chizhik. Slowing the time-fluctuating MIMO channel by beam forming. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 3(5):1554 – 1565, September 2004.
- [4] M. Sánchez-Fernández, S. Zazo, and R. Valenzuela. Performance Comparison between Beamforming and Spatial Multiplexing for the Downlink Wireless Cellular Systems. *IEEE Transactions on Communications*, 19, December 2001.
- [5] H. Xu, D. Chizhik, H. Huang, and R. Valenzuela. A generalized space-time multiple-input multiple-output (MIMO) channel model. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 3(3):966 – 975, May 2004.
- [6] J-P Kermoal, L. Schumacher, F. Frederiksen, and P.E. Mogensen. Polarization diversity in mimo radio channels: experimental validation of a stochastic model and performance assessment. In *Vehicular Technology Conference, 2001. VTC 2001 Fall. IEEE VTS 54th*, volume 1, pages 22–26, 2001.
- [7] A. Goldsmith. *Wireless communications*. Cambridge University Press, 2005.
- [8] E. Biglieri, R. Calderbank, A. Constantinides, A. Goldsmith, A. Paulraj, and H. V. Poor. *MIMO wireless communications*. Cambridge University Press, 2010.
- [9] H. Huang, C. Papadias, and S. Venkatesen. *Wireless communication for cellular networks*. Springer, 2012.

- [10] W.C.Y. Lee. Effects on correlation between two mobile radio base station antennas. *IEEE Transactions on Communications*, COM-21:1214–1224, November 1973.
- [11] S. Shiu, G. J. Foschini, M. J. Gans, and J. M. Kahn. Fading correlation and its effect on the capacity of multielement antenna systems. *IEEE Transactions on Communications*, 48(3):502–513, March 2000.
- [12] D. Chizhik, F. Rashid-Farrokh, J. Ling, and A. Lozano. Effect of antenna separation on the capacity of BLAST in correlated channels. *IEEE Communications Letters*, 4(11):1337 – 339, November 2000.
- [13] K.I. Pedersen, P.E. Mogensen, and B.H. Fleury. A stochastic model of the temporal and azimuthal dispersion seen at the base station in outdoor propagation environments. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 49(2):437 – 447, March 2000.
- [14] S.A. Jafar and A. Goldsmith. Transmitter optimization and optimality of beamforming for multiple antenna systems. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 3(4):1165 – 1175, July 2004.
- [15] E. Visotsky and U. Madhow. Space-Time Transmit Precoding With Imperfect Feedback. *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(6):2632–2639, September 2001.
- [16] A.M. Tulino, A. Lozano, and S. Verdú. Capacity-achieving input covariance for single-user multi-antenna channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 5(3):662–671, March 2006.
- [17] A.M. Tulino, A. Lozano, and S. Verdú. Impact of antenna correlation on the capacity of mutiantenna channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(7):2491 – 2509, July 2005.
- [18]
- [19] Fredrik Rusek, Daniel Persson, Buon Kiong Lau, Erik G. Larsson, Thomas L. Marzetta, Ove Edfors, Fredrik Tufvesson, Post Print, Fredrik Rusek, Daniel Persson, Buon Kiong Lau, Erik G. Larsson, Thomas L. Marzetta, Fredrik Rusek, Daniel Persson, Buon Kiong Lau, Erik G. Larsson, Thomas L. Marzetta, Ove Edfors, and Fredrik Tufvesson. Scaling up mimo: Opportunities and challenges with very large arrays. *IEEE Signal Process. Mag*, pages 40–60, 2013.
- [20] X. Gao, O. Edfors, F. Rusek, and F. Tufvesson. Linear Pre-Coding Performance in Measured Very-Large MIMO Channels. *IEEE Vehicular Technology Conference*, 2011.